

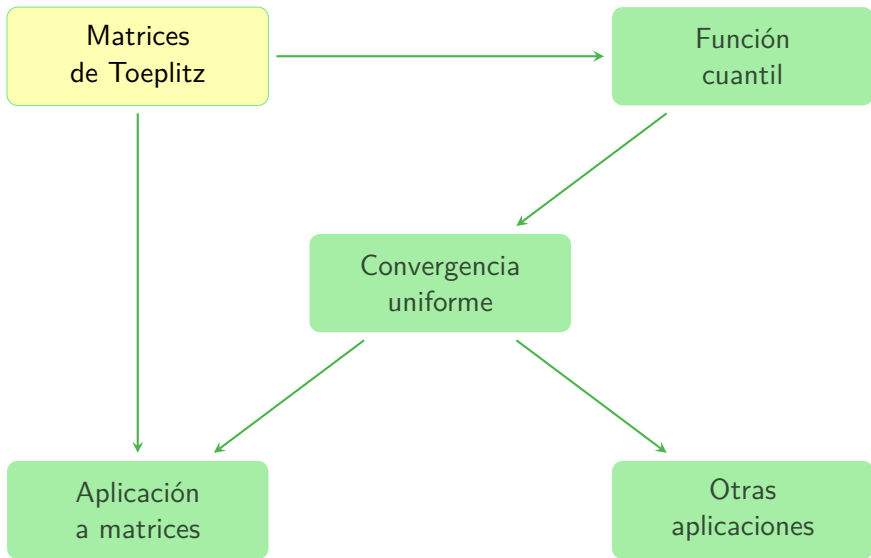
De la convergencia en distribución a la aproximación uniforme

Egor Maximenko

utilizando trabajos juntos con Johan Manuel Bogoya,
Albrecht Böttcher y Sergei Grudsky

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

29 de Septiembre de 2015



Matrices de Toeplitz

$$T_5(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} .$$

Matrices de Toeplitz

$$T_5(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Suponemos que a_k ($k \in \mathbb{Z}$) son los coeficientes de Fourier de una función $a \in L^\infty(0, 2\pi)$:

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(\theta) e^{-ki\theta} d\theta.$$

La función a se llama el *símbolo generador* de las matrices

$$T_n(a) = [a_{j-k}]_{j,k=1}^n.$$

La matriz $T_n(a)$ es un corte finito del operador de convolución

$$C(a) = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \ddots \\ \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \ddots \\ \ddots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots \\ \ddots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ \ddots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

$$T_3(a) = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Diagonalización del operador de convolución

$C(a) :=$ el operador de convolución con la convolución $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$C(a): \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad (C(a)x)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} x_k.$$

Diagonalización del operador de convolución

$C(a) :=$ el operador de convolución con la convolución $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$C(a): \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad (C(a)x)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} x_k.$$

$\mathcal{F} :=$ la transformada de Fourier–Plancherel sobre el grupo \mathbb{Z} :

$$\mathcal{F}: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(0, 2\pi), \quad (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto x(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{ni\theta}.$$

Diagonalización del operador de convolución

$C(a) :=$ el operador de convolución con la convolución $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$C(a): \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad (C(a)x)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} x_k.$$

$\mathcal{F} :=$ la transformada de Fourier–Plancherel sobre el grupo \mathbb{Z} :

$$\mathcal{F}: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(0, 2\pi), \quad (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto x(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{ni\theta}.$$

$M(a) :=$ es el operador de multiplicación por la función a :

$$M(a): \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad (M(a)f)(\theta) = a(\theta)f(\theta).$$

Diagonalización del operador de convolución

$C(a) :=$ el operador de convolución con la convolución $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$:

$$C(a): \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad (C(a)x)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} x_k.$$

$\mathcal{F} :=$ la transformada de Fourier–Plancherel sobre el grupo \mathbb{Z} :

$$\mathcal{F}: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(0, 2\pi), \quad (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto x(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{ni\theta}.$$

$M(a) :=$ es el operador de multiplicación por la función a :

$$M(a): \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad (M(a)f)(\theta) = a(\theta)f(\theta).$$

Por el teorema de convolución,

$$\mathcal{F}C(a)\mathcal{F}^{-1} = M(a).$$

Propiedades espectrales de $C(a)$ y $T_n(a)$

De la fórmula

$$\mathcal{F}C(a)\mathcal{F}^{-1} = M(a)$$

se sigue que

$$\|C(a)\| = \|a\|_\infty, \quad \text{sp}(C(a)) = \mathcal{R}(a).$$

El objetivo es describir propiedades asintóticas de $T_n(a)$, en particular, el comportamiento asintótico de sus valores singulares. Los ordenamos de manera ascendente:

$$s_1^{(n)} \leq \dots \leq s_n^{(n)}.$$

El caso de matrices de Toeplitz positivas definidas

Si el símbolo generador es real:

$$a \in L^\infty([0, 2\pi], \mathbb{R}),$$

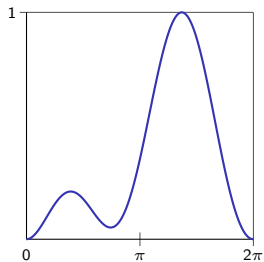
entonces las matrices de Toeplitz $T_n(a)$ son autoadjuntas.

$$T_5(a) = \begin{bmatrix} a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} & \overline{a_4} \\ a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \overline{a_1} \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Si además $\mathcal{R}(a) \subset [0, +\infty)$, entonces $T_n(a)$ son positivas definidas, y sus valores singulares coinciden con los valores propios.

Valores singulares de matrices de Toeplitz

Gráfica de $|a|$

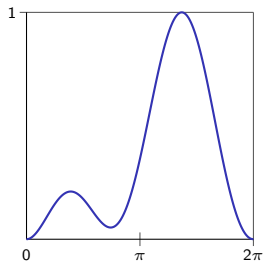


Valores singulares de $T_8(a)$



Valores singulares de matrices de Toeplitz

Gráfica de $|a|$

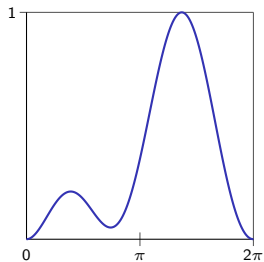


Valores singulares de $T_{16}(a)$



Valores singulares de matrices de Toeplitz

Gráfica de $|a|$

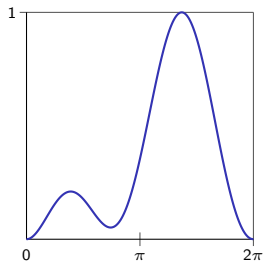


Valores singulares de $T_{32}(a)$

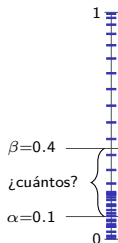


Valores singulares de matrices de Toeplitz

Gráfica de $|a|$



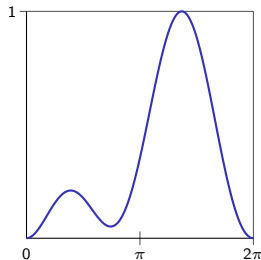
Valores singulares de $T_{32}(a)$



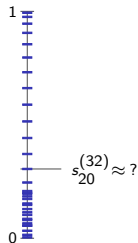
Primera pregunta: $\#\{j: s_j^{(n)} \in [\alpha, \beta]\} \approx ?$ (Szego, Parter, Avram)

Valores singulares de matrices de Toeplitz

Gráfica de $|a|$



Valores singulares de $T_{32}(a)$



Primera pregunta: $\#\{j: s_j^{(n)} \in [\alpha, \beta]\} \approx ?$ (Szego, Parter, Avram)

Segunda pregunta: $s_j^{(n)} \approx ?$

$T_n(a)T_n(b) \approx T_n(ab)$ en cierto sentido

Sea $C_{per}^\infty[0, 2\pi]$ el conjunto de las funciones $a: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ que son infinitamente suaves y satisfacen

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad a^{(k)}(0) = a^{(k)}(2\pi).$$

Denotemos por $\|\cdot\|_F$ a la norma de Frobenius.

Lema

Sean $a, b \in C_{per}^\infty[0, 2\pi]$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \|T_n(a)T_n(b) - T_n(ab)\|_F \right) = 0.$$

Teorema límite de Avram–Parter (generalización del teorema de Szegő sobre valores propios)

$$a \in L^\infty(0, 2\pi)$$

$$\varphi \in C(\mathbb{R})$$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varphi(s_j^{(n)}) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(|a(\theta)|) d\theta$$

Corolario del teorema límite de Avram–Parter

distribución de los valores singulares de matrices de Toeplitz

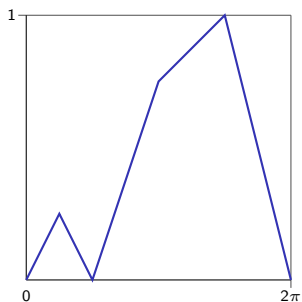
$$a \in L^\infty(0, 2\pi)$$

$$\alpha < \beta \\ |a| \neq \alpha, \beta \text{ c.t.p.}$$

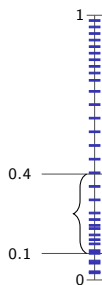
$$\frac{\#\{j: \alpha \leq s_j^{(n)} \leq \beta\}}{n} \longrightarrow \frac{\mu_{\mathbb{R}} \{\theta \in [0, 2\pi]: \alpha \leq |a(e^{i\theta})| \leq \beta\}}{2\pi}$$

Ejemplo para ilustrar el corolario

Gráfica de $|a|$

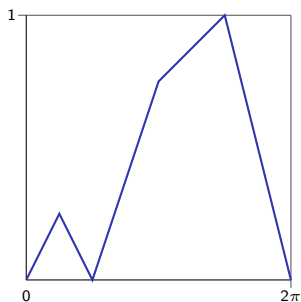


Valores singulares de $T_{32}(a)$

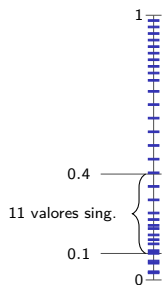


Ejemplo para ilustrar el corolario

Gráfica de $|a|$



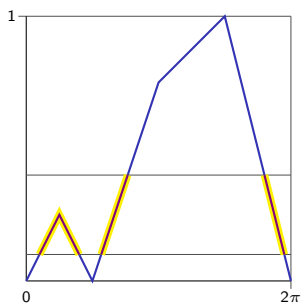
Valores singulares de $T_{32}(a)$



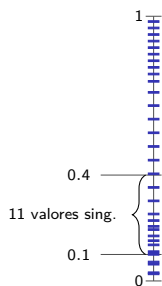
$$\frac{11}{32} \approx 0.344$$

Ejemplo para ilustrar el corolario

Gráfica de $|a|$



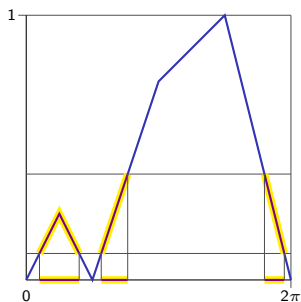
Valores singulares de $T_{32}(a)$



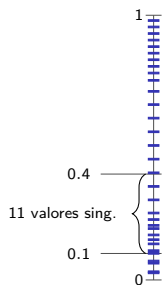
$$\frac{11}{32} \approx 0.344$$

Ejemplo para ilustrar el corolario

Gráfica de $|a|$



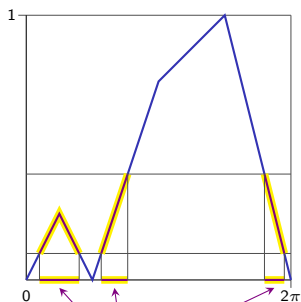
Valores singulares de $T_{32}(a)$



$$\frac{11}{32} \approx 0.344$$

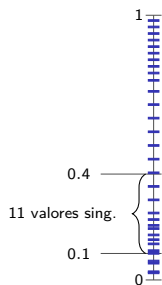
Ejemplo para ilustrar el corolario

Gráfica de $|a|$



$$\frac{\mu_{\mathbb{R}} \{ \theta: 0.1 \leq |a(\theta)| \leq 0.4 \}}{2\pi} = 0.325$$

Valores singulares de $T_{32}(a)$

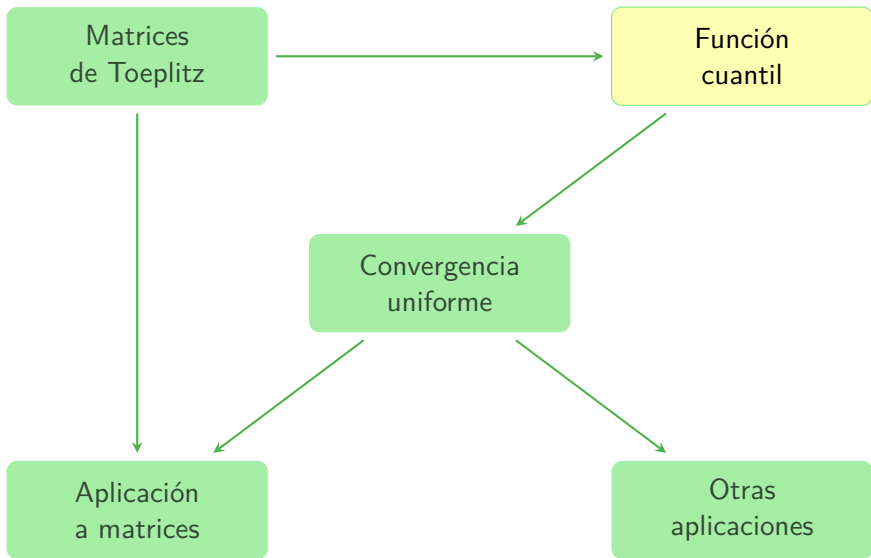


$$\frac{11}{32} \approx 0.344$$

Szegő, Parter, Avram describieron la distribución asintótica de los valores propios y singulares de $T_n(a)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Otra pregunta se quedó sin respuesta:

$$s_j^{(n)} \approx ?$$



Función cuantil asociada a una medida de probabilidad de Borel sobre \mathbb{R}

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) :=$ la σ -álgebra de Borel sobre \mathbb{R} .

$\mathcal{PM}(\mathbb{R}) :=$ el conjunto de las medidas de probabilidad $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ tales que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A} \subseteq 2^{\mathbb{R}}$.

Dada $\mu \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$, se definen:

la **función de distribución acumulada** $F_{\mu}: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$,

$$F_{\mu}(v) := \mu(-\infty, v],$$

la **función cuantil** $Q_{\mu}: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$Q_{\mu}(p) := \inf\{v \in \mathbb{R} : F_{\mu}(v) \geq p\}.$$

Soporte de una medida de probabilidad en \mathbb{R}

Dada $\mu \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$, su soporte $\text{supp}(\mu)$ es

$$\text{supp}(\mu) := \{v \in \mathbb{R} : \mu(v - \varepsilon, v + \varepsilon) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0\}.$$

Si μ tiene soporte acotado, entonces

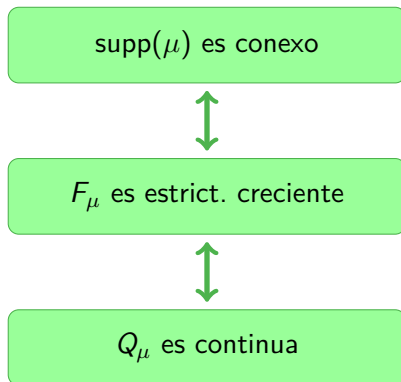
$$Q_\mu(0^+) = \inf(\text{supp}(\mu)), \quad Q_\mu(1^-) = \sup(\text{supp}(\mu)),$$

y en este caso extendemos Q_μ a $[0, 1]$ por continuidad.

Criterio de continuidad de la función cuantil

Sea $\mu \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ con soporte acotado.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:



Función cuantil asociada a una variable aleatoria

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, y sea $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función \mathcal{F} -medible.

Le asociamos la *medida imagen* (pushforward measure) $\mu \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$,

$$\mu(B) := P(X^{-1}(B)).$$

Aplicando las definiciones anteriores a este caso, definimos el rango esencial de X , la función de distribución y la función cuantil:

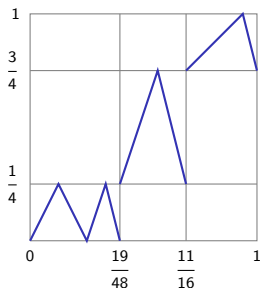
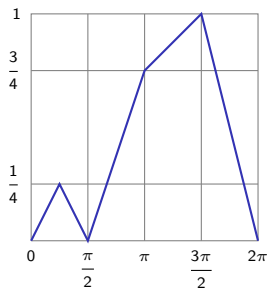
$$\mathcal{R}(X) := \{v \in \mathbb{R} : P(X^{-1}(v - \varepsilon, v + \varepsilon)) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0\},$$

$$F_X(v) := P(X^{-1}(-\infty, v]),$$

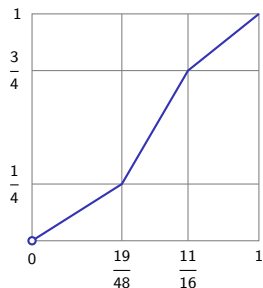
$$Q_X(p) := \inf\{v \in \mathbb{R} : F_X(v) \geq p\}.$$

Construcción de la función cuantil asociada a un símbolo generador lineal a trozos

Gráfica de a

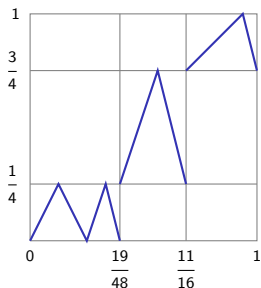
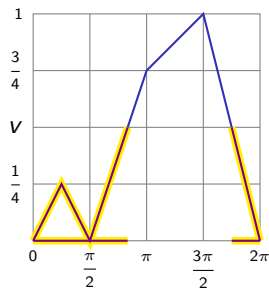


Gráfica de Q_a

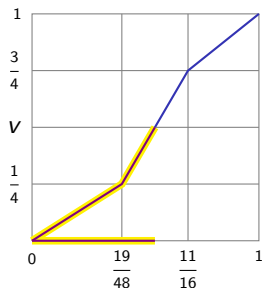


Construcción de la función cuantil asociada a un símbolo generador lineal a trozos

Gráfica de a



Gráfica de Q_a

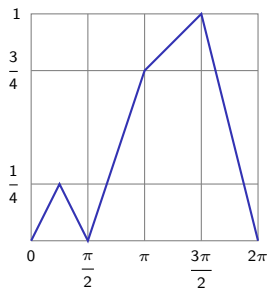


a y Q_a son idénticamente distribuidas:

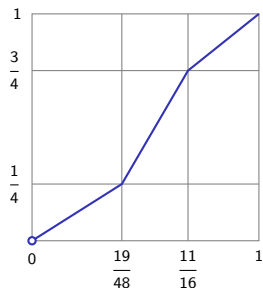
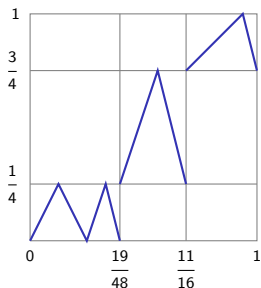
$$\frac{1}{2\pi} \mu_{\mathbb{R}} \{ \theta \in [0, 2\pi] : a(\theta) \leq v \} = \mu_{\mathbb{R}} \{ p \in [0, 1] : Q_a(p) \leq v \}$$

Construcción de la función cuantil asociada a un símbolo generador lineal a trozos

Gráfica de a



Gráfica de Q_a



a $\xrightarrow{\text{reordenamiento en el estilo de Lebesgue}}$ Q_a

Medida asociada a una lista de números reales

Sea $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ una lista de números reales.

Le asociamos la medida de conteo normalizada μ :

$$\mu(B) = \frac{\#\{j \in \{1, \dots, d\} : \alpha_j \in B\}}{d} \quad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

En otras palabras, μ es el promedio aritmético de las medidas de Dirac concentradas en los puntos $\alpha_1, \dots, \alpha_d$.

Si la lista $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ es ordenada de manera ascendente, entonces

$$F_\mu(v) = \frac{\max\{j \in \{1, \dots, d\} : \alpha_j \leq v\}}{d}$$

y

$$Q_\mu(j/d) = \alpha_j.$$

Función cuantil de una lista de números

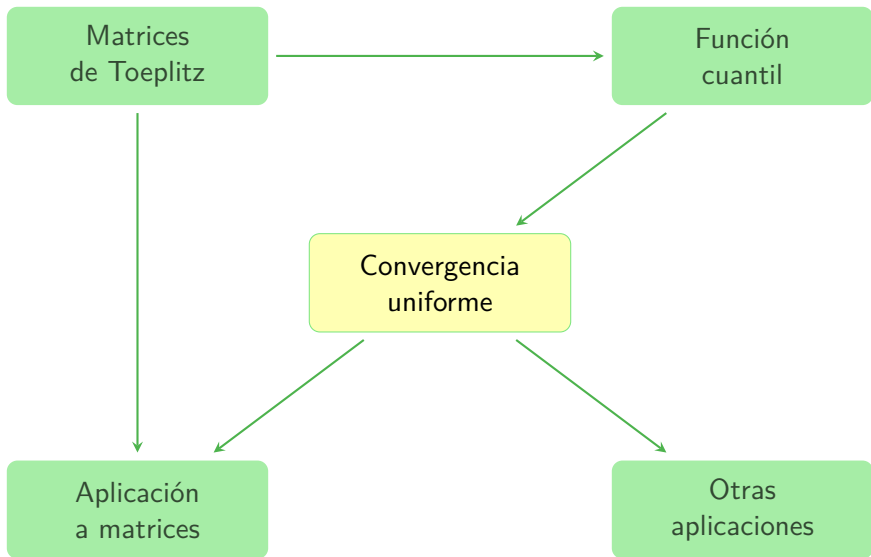


Los mismos números en el orden ascendente:



$$\text{QuantileFunction}(1/3) = 118$$

porque 118 es el número más pequeño v
tal que al menos $1/3$ de los elementos son menores o iguales a v .



Criterio de convergencia en distribución

Sea $\Lambda \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$ y sea $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{PM}(\mathbb{R})$.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(i) Para cada $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} \varphi d\Lambda.$$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\mu_n}(v) = F_{\Lambda}(v)$

en cada punto $v \in \mathbb{R}$ donde F_{Λ} es continua.

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{\mu_n}(p) = Q_{\Lambda}(p)$

en cada punto $p \in (0, 1)$ donde Q_{Λ} es continua.

Cuando se cumplen estas condiciones, escribimos $\mu_n \rightsquigarrow \Lambda$.

Lema sobre la convergencia uniforme

$$f_n(p) \rightarrow g(p) \\ \forall p \in [0, 1]$$

$$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ f_n \text{ son crecientes}$$

$$g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ g \text{ es continua}$$

$$f_n \xrightarrow{[0,1]} g$$

Teorema (resultado principal)

$$\mu_n \rightsquigarrow \Lambda$$

$$\mu_n \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$$
$$\text{supp}(\mu_n) \subseteq [\alpha, \beta]$$

$$\Lambda \in \mathcal{PM}(\mathbb{R})$$
$$\text{supp}(\Lambda) = [\alpha, \beta]$$

$$Q_{\mu_n} \xrightarrow{[0,1]} Q_{\Lambda}$$

Distribución asintótica de una sucesión de tuplas

Sean:

$\alpha = \left(\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_{d(n)}^{(n)} \right)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de tuplas de números reales, donde la sucesión de las longitudes tiende a infinito: $d(n) \rightarrow \infty$.

(Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad;

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función \mathcal{F} -medible.

Se dice que α es **asintóticamente distribuida** como (X, P) si para cada $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d(n)} \sum_{j=1}^{d(n)} \varphi(\alpha_j^{(n)}) = \int_{\Omega} \varphi \circ X dP.$$

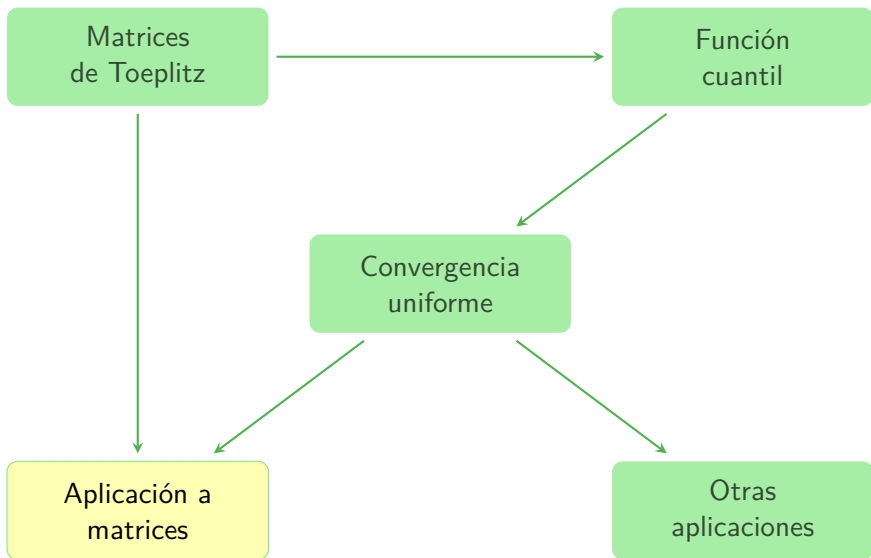
Teorema: de la distribución asintótica de tuplas a la convergencia uniforme

Supongamos que

- $\alpha = (\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_{d(n)}^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de tuplas en \mathbb{R} .
- α es asintóticamente distribuida como (X, P) .
- $\mathcal{R}(X)$ es conexo y acotado.
- $\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_{d(n)}^{(n)}$ están en $\mathcal{R}(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
- $\alpha_1^{(n)} \leq \alpha_2^{(n)} \leq \dots \leq \alpha_{d(n)}^{(n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq d(n)} |\alpha_j^{(n)} - Q_{\wedge}(j/d(n))| = 0.$$



Convergencia uniforme de los valores singulares

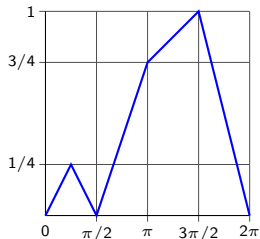
$$a \in L^\infty(0, 2\pi)$$

$$\mathcal{R}(|a|) = [0, \|a\|_\infty]$$

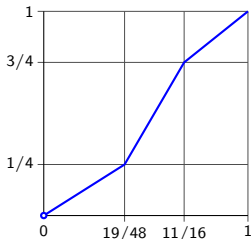
$$\max_{1 \leq j \leq n} |s_j^{(n)} - Q_{|a|}(j/n)| \longrightarrow 0$$

Ejemplo

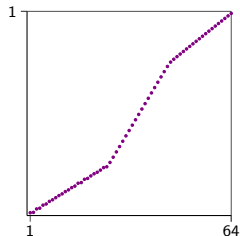
Gráfica de $|a|$



Gráfica de $Q|a|$



Val. sing. de $T_{64}(a)$

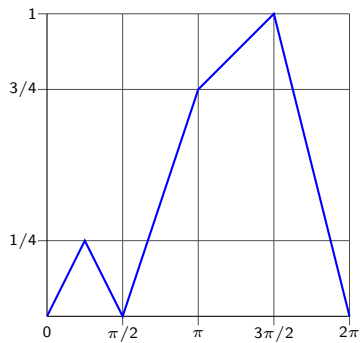


Cada valor singular $s_j^{(n)}$ se muestra como el punto $\left(\frac{j}{n}, s_j^{(n)}\right)$.

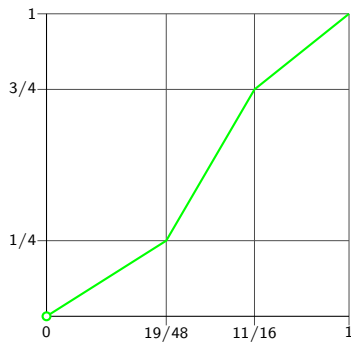
Se ve que el tercer dibujo parece mucho al segundo.

Ejemplo

Gráfica de $|a|$

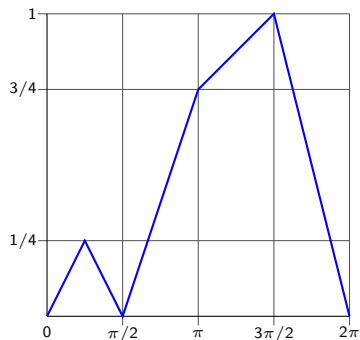


Gráfica de $Q_{|a|}$

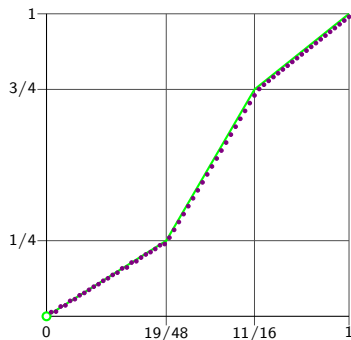


Ejemplo

Gráfica de $|a|$



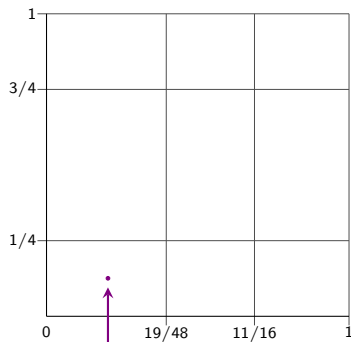
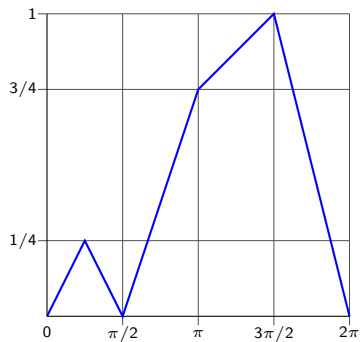
Gráfica de $Q_{|a|}$



y los puntos $(j/n, s_j^{(n)})$

Ejemplo

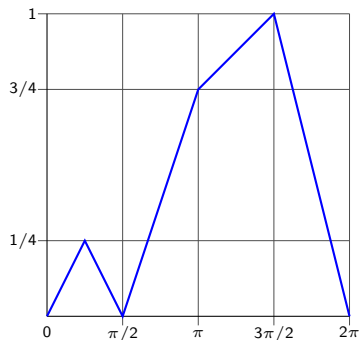
Gráfica de $|a|$



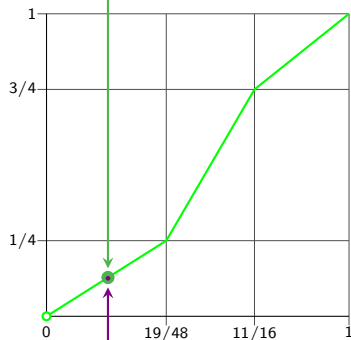
$$\left(\frac{13}{64}, s_{13}^{(64)}\right)$$

Ejemplo

Gráfica de $|a|$



$$\left(\frac{13}{64}, Q_{|a|} \left(\frac{13}{64} \right) \right)$$



$$\left(\frac{13}{64}, s_{13}^{(64)} \right)$$

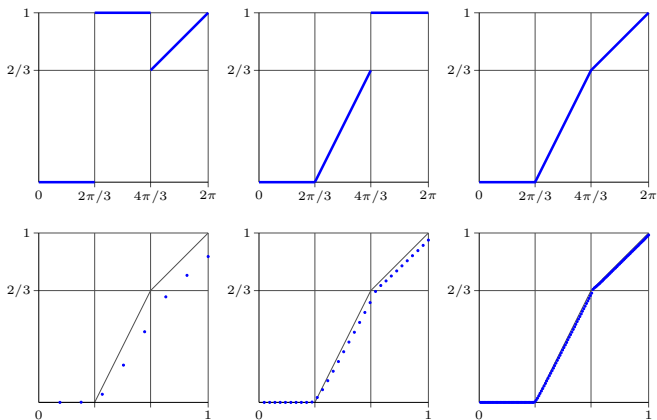
El teorema límite de Avram–Parter
combinado con el concepto de función cuantil
nos proporciona el término principal
de la asintótica de los valores singulares:

$$s_j^{(n)} \approx Q_{|a|} \left(\frac{j}{n} \right)$$

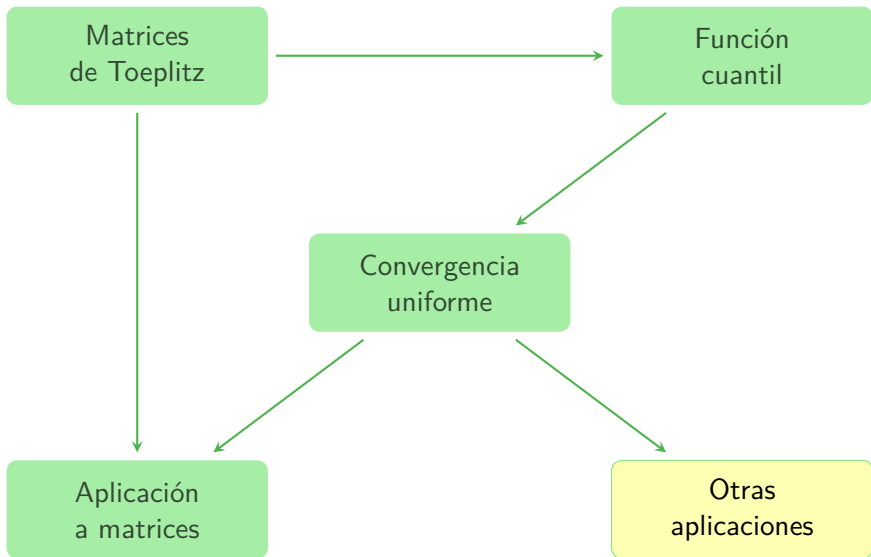
suponiendo que $a \in L^\infty(0, 2\pi)$ y $\mathcal{R}(|a|) = [0, \|a\|_\infty]$.

Valores singulares de productos de matrices de Toeplitz

Los dibujos de arriba muestran los símbolos a , b , ab .

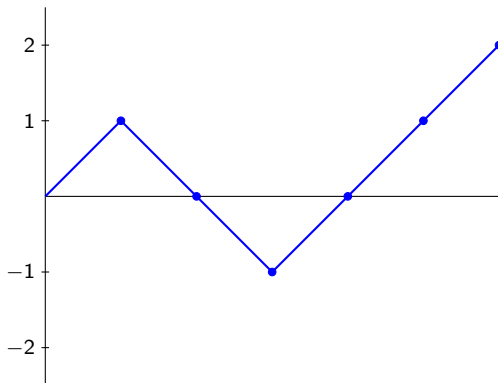


Dibujos de abajo: los valores singulares de $T_n(a)T_n(b)$, $n = 8, 32, 128$, como puntos con coordenadas $(j/n, s_j^{(n)})$, y la función cuantil de ab .



Caminatas aleatorias discretas

El propósito de este ejemplo es “voltear” (volver del revés) la famosa ley de arcoseno que descubrió P. Lévy en 1939.



Para cada trayectoria w de longitud n sea $G_n(w)$ la porción del camino con valores positivos. En el dibujo,

$$G_6(w) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Caminatas aleatorias, $n = 3$

w	sumas parciales	$G_3(w)$
$-1, -1, -1$	$-1, -2, -3$	0
$-1, -1, 1$	$-1, -2, -1$	0
$-1, 1, -1$	$-1, 0, -1$	0
$-1, 1, 1$	$-1, 0, 1$	$1/3$
$1, -1, -1$	$1, 0, -1$	$1/3$
$1, -1, 1$	$1, 0, 1$	$2/3$
$1, 1, -1$	$1, 2, 1$	1
$1, 1, 1$	$1, 2, 3$	1

Sea $\alpha^{(3)} = (\alpha_1^{(3)}, \dots, \alpha_8^{(3)})$ la lista de números $G_3(w)$, $w \in \{-1, 1\}^3$, después de ordenarlos de manera ascendente:

$$\left(0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1\right).$$

Caminatas aleatorias, n general

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $w = (w_1, \dots, w_n) \in \{-1, 1\}^n$ ponemos

$$G_n(w) = \frac{\#\{k \in \{1, \dots, n\} : w_1 + \dots + w_k > 0\}}{n}.$$

Denotamos por $\alpha^{(n)} = (\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_{2^n}^{(n)})$ a la lista de los números $G_n(w)$, $w \in \{-1, 1\}^n$, escrita en el orden ascendente.

La ley de arco seno de Lévy

La sucesión de n -tuplas $\alpha^{(n)}$ es asintóticamente distribuida como (X, P) , donde P es la medida de Lebesgue en $[0, 1]$ y

$$X(v) := \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{v}.$$

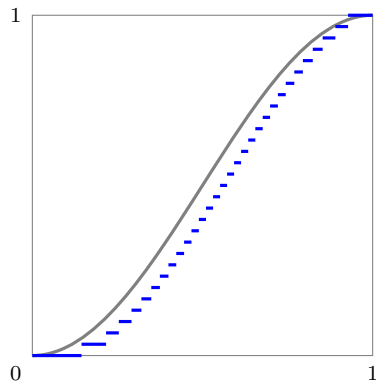
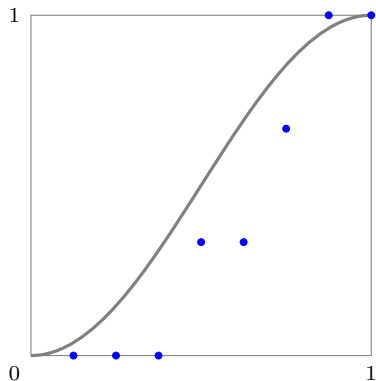
En este caso la función cuantil es

$$Q_X(p) = \sin^2 \frac{\pi p}{2}.$$

Nuestro corolario de la ley de arco seno es la siguiente convergencia uniforme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq 2^n} \left| \alpha_j^{(n)} - \sin^2 \frac{\pi j}{2^{n+1}} \right| = 0.$$

Gráficas para $n = 3$ y para $n = 2^{30}$



Los puntos azules son $(j/2^n, \alpha_j^{(n)})$, $j = 1, \dots, 2^n$.

La línea gris es la gráfica $Q_X(p) = \sin^2 \frac{\pi p}{2}$.

Errores uniformes

Para cada n denotemos por $\varepsilon^{(n)}$ al error uniforme:

$$\varepsilon^{(n)} := \max_{1 \leq j \leq 2^n} \left| \alpha_j^{(n)} - \sin^2 \frac{\pi j}{2^{n+1}} \right| = 0.$$

La siguiente tabla muestra que la convergencia es bastante lenta:

n	5	10	15	20	25	30
$\varepsilon^{(n)}$	0.300	0.209	0.164	0.144	0.126	0.116

Otra aplicación: sucesiones reales asintóticamente distribuidas

Sea Λ una medida de probabilidad de Borel en \mathbb{R} ,
tal que $\text{supp}(\Lambda)$ es conexo y acotado,
y sea $(\beta_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión en \mathbb{R} .

Supongamos que $(\beta_j)_{j=1}^{\infty}$ es asintóticamente distribuida como Λ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{j \in \{1, \dots, n\} : \beta_j \leq v\}}{n} = F_{\Lambda}(v).$$

Denotemos por $(\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)})$ a la lista $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ ordenada.
Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq n} |\alpha_j^{(n)} - Q_{\Lambda}(j/n)| = 0.$$

Caso particular: sucesiones uniformemente distribuidas

Si $F(v) = v$ en $[0, 1]$, entonces $Q(p) = p$ en $[0, 1]$, y

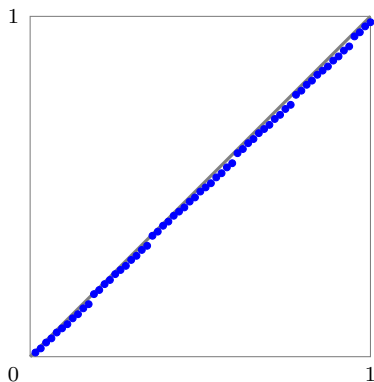
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq n} |\alpha_j^{(n)} - j/n| = 0.$$

Por ejemplo, sea

$$\beta_j = j\sqrt{2} - \lfloor j\sqrt{2} \rfloor.$$

Por el Teorema de Equidistribución de Weyl, $(\beta_j)_{j=1}^{\infty}$ es uniformemente distribuida en $[0, 1]$.

Ejemplo $\beta_j = j\sqrt{2} - \lfloor j\sqrt{2} \rfloor$



Las abscisas de los puntos azules son $j/64$, $j = 1, \dots, 64$.

Las ordenadas de los puntos azules son los números $j\sqrt{2} - \lfloor j\sqrt{2} \rfloor$,
ordenados de manera ascendente.

La línea gris es la gráfica de la función identidad en $[0, 1]$.

Errores uniformes

$$\varepsilon^{(n)} := \max_{1 \leq j \leq n} \left| \alpha_j^{(n)} - \frac{j}{n} \right|.$$

n	32	64	128	256	512
$\varepsilon^{(n)}$	$4.6 \cdot 10^{-2}$	$2.6 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$5.6 \cdot 10^{-2}$	$3.3 \cdot 10^{-3}$

Para $n \leq 10000$ obtuvimos $\varepsilon^{(n)} \leq \frac{0.7 \ln(n)}{n}$.

¡Gracias!