

Descripción del espacio de Steinwart, Hush y Scovel por medio de la transformada de Fourier

Egor Maximenko

Coautores: Jesús Alberto Flores Hinostrosa y Maribel Loaiza Leyva

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

58 Congreso Nacional de la SMM
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
de 19 al 24 de Octubre de 2025
Fecha de exposición: 21 de Octubre de 2025

- 1 Introducción
- 2 Descripción en términos de funciones analíticas
- 3 Descripción por medio de la transformada de Fourier
- 4 Bases ortonormales
- 5 Descripción en términos de convoluciones

Plan

- 1 Introducción
- 2 Descripción en términos de funciones analíticas
- 3 Descripción por medio de la transformada de Fourier
- 4 Bases ortonormales
- 5 Descripción en términos de convoluciones

Egor Maximenko, con Jesús Alberto Flores Hinostrosa y Maribel Loaiza Leyva.
Descripción del espacio de Steinwart, Hush y Scovel por medio de la transformada de Fourier.

Núcleo (función positivamente definida)

Sea D un conjunto y sea $K: D^2 \rightarrow \mathbb{C}$.

Tratamos K como una función de dos argumentos o como una familia de funciones:

$$K_y(x) = K(x, y) \quad (x, y \in D).$$

Se dice que K es un **núcleo** si $\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall x_1, \dots, x_m \in D$

$$\det \begin{bmatrix} K(x_1, x_1) & K(x_1, x_2) & \dots & K(x_1, x_m) \\ K(x_2, x_1) & K(x_2, x_2) & \dots & K(x_2, x_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_m, x_1) & K(x_m, x_2) & \dots & K(x_m, x_m) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Espacios de Hilbert con núcleos reproductores

Sean D un conjunto,

$\mathbb{C}^D :=$ el espacio vectorial de todas las funciones $D \rightarrow \mathbb{C}$,

Espacios de Hilbert con núcleos reproductores

Sean D un conjunto,

$\mathbb{C}^D :=$ el espacio vectorial de todas las funciones $D \rightarrow \mathbb{C}$,

H un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^D$ y al mismo tiempo un espacio de Hilbert,

Espacios de Hilbert con núcleos reproductores

Sean D un conjunto,

$\mathbb{C}^D :=$ el espacio vectorial de todas las funciones $D \rightarrow \mathbb{C}$,

H un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^D$ y al mismo tiempo un espacio de Hilbert,

$(K_y)_{y \in D}$ una familia de funciones, $\forall y \in D \quad K_y \in H$.

Espacios de Hilbert con núcleos reproductores

Sean D un conjunto,

$\mathbb{C}^D :=$ el espacio vectorial de todas las funciones $D \rightarrow \mathbb{C}$,

H un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^D$ y al mismo tiempo un espacio de Hilbert,

$(K_y)_{y \in D}$ una familia de funciones, $\forall y \in D \quad K_y \in H$.

Se dice que $(K_y)_{y \in D}$ es un **núcleo reproductor** de H si

$$\forall f \in H \quad \forall y \in D \quad f(y) = \langle f, K_y \rangle.$$

Espacios de Hilbert con núcleos reproductores

Sean D un conjunto,

$\mathbb{C}^D :=$ el espacio vectorial de todas las funciones $D \rightarrow \mathbb{C}$,

H un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^D$ y al mismo tiempo un espacio de Hilbert,

$(K_y)_{y \in D}$ una familia de funciones, $\forall y \in D \quad K_y \in H$.

Se dice que $(K_y)_{y \in D}$ es un **núcleo reproductor** de H si

$$\forall f \in H \quad \forall y \in D \quad f(y) = \langle f, K_y \rangle.$$

En este caso, se dice que H es un **EHNR** sobre el dominio D .

Espacios de Hilbert con núcleos reproductores

Sean D un conjunto,

$\mathbb{C}^D :=$ el espacio vectorial de todas las funciones $D \rightarrow \mathbb{C}$,

H un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^D$ y al mismo tiempo un espacio de Hilbert,

$(K_y)_{y \in D}$ una familia de funciones, $\forall y \in D \quad K_y \in H$.

Se dice que $(K_y)_{y \in D}$ es un **núcleo reproductor** de H si

$$\forall f \in H \quad \forall y \in D \quad f(y) = \langle f, K_y \rangle.$$

En este caso, se dice que H es un **EHNR** sobre el dominio D .

En caso de existencia, el núcleo reproductor de H es único.

Teorema de Moore–Aronszajn

Dado un núcleo K en un dominio D ,
existe un único espacio de Hilbert H sobre el dominio D
tal que su núcleo reproductor es K .

Idea de demostración: empezar con el espacio vectorial

$$\text{lin}\{K_y: y \in D\},$$

definir el producto interno

$$\left\langle \sum_{p=1}^m K_{y_p}, \sum_{q=1}^r K_{y_q} \right\rangle := \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^r K_{y_p}(y_q),$$

y hacer una completación.

El núcleo de Gauss y el espacio $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$

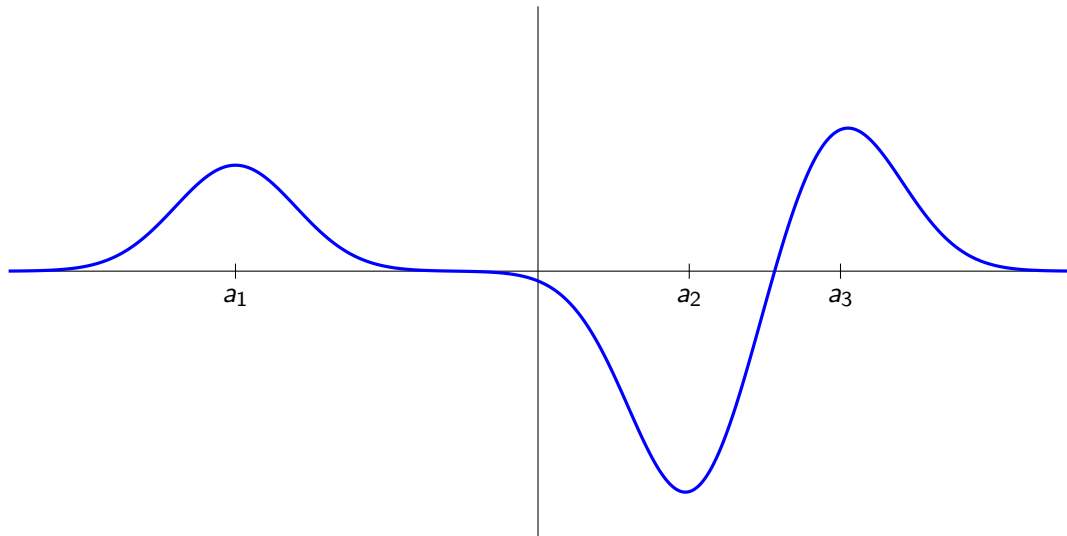
Núcleo de Gauss (= núcleo de Weierstrass = núcleo de calor):

$$K_y(x) := K(x, y) := \exp(-\pi|x - y|^2) \quad (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

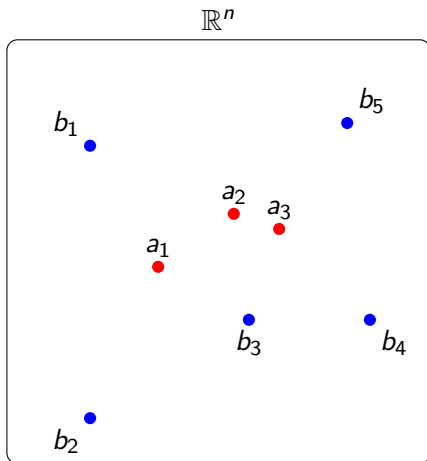
$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) :=$ el EHNR cuyo núcleo reproductor es K .

Objetivo de la plática: explicar varias descripciones de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$.

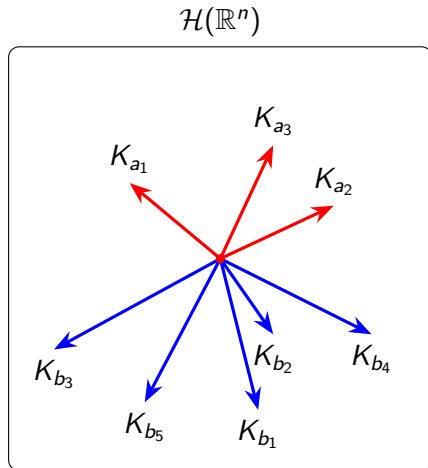
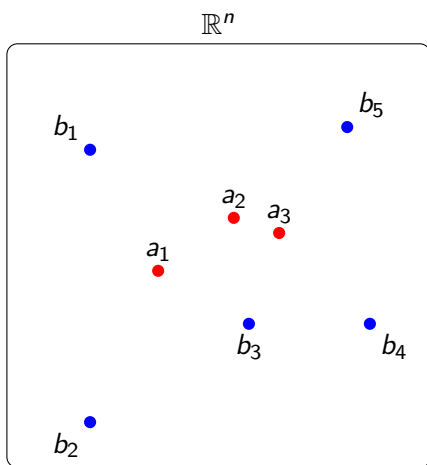
Combinaciones lineales de K_{a_j} ($n = 1$, $a_j \in \mathbb{R}$)



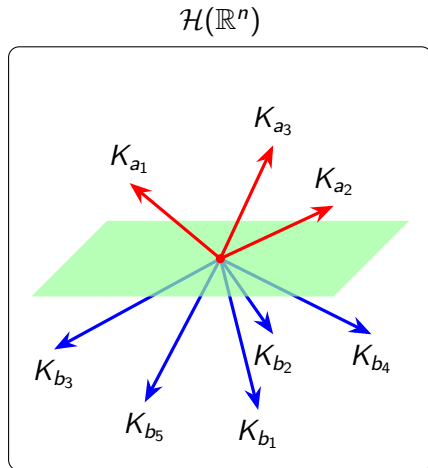
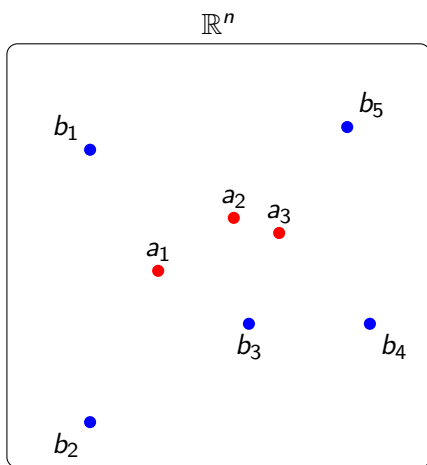
Aplicación del núcleo K en problemas de separación/clasificación



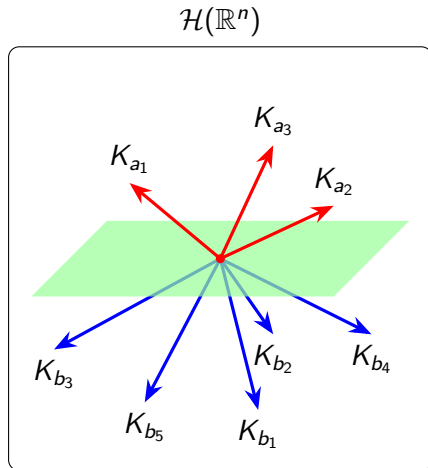
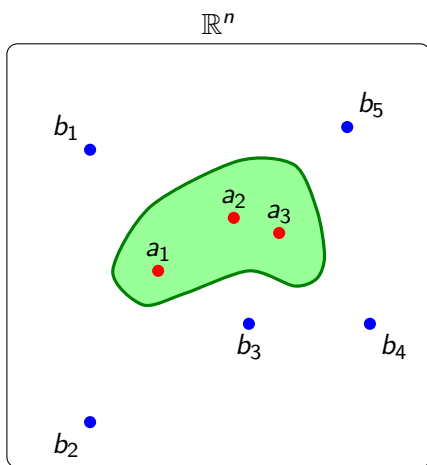
Aplicación del núcleo K en problemas de separación/clasificación



Aplicación del núcleo K en problemas de separación/clasificación



Aplicación del núcleo K en problemas de separación/clasificación



Plan

- 1 Introducción
- 2 Descripción en términos de funciones analíticas
- 3 Descripción por medio de la transformada de Fourier
- 4 Bases ortonormales
- 5 Descripción en términos de convoluciones

Egor Maximenko, con Jesús Alberto Flores Hinostrosa y Maribel Loaiza Leyva.
Descripción del espacio de Steinwart, Hush y Scovel por medio de la transformada de Fourier.

Bibliografía



Steinwart, Hush, Scovel (2006):

An explicit description of the reproducing kernel Hilbert spaces of Gaussian RBF kernels.



Alpay, Colombo, Diki, Sabadini (2022):

An approach to the Gaussian RBF kernels via Fock spaces.



Folland (1989):

Harmonic analysis on phase space.



Paulsen, Raghupathi (2016):

An introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces.

Espacio de Bargmann–Segal–Fock

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n) := \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{C}^n) : \|f\|_{\mathcal{F}} < +\infty \right\},$$

$$\|f\|_{\mathcal{F}}^2 := 2^n \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-2\pi|z|^2} d\lambda_{2n}(z),$$

donde λ_{2n} es la medida de Lebesgue en $\mathbb{C}^n$.

Núcleo reproductor:

$$K_z^{\mathcal{F}}(w) = e^{2\pi\langle w, z \rangle} \quad (w, z \in \mathbb{C}^n).$$

Espacio de Steinwart, Hush y Scovel

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}^2(\mathbb{C}^n) := \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{C}^n) : \|f\|_{\mathcal{S}} < +\infty \right\},$$

$$\|f\|_{\mathcal{S}}^2 := 2^n \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-4\pi |\text{Im}(z)|^2} d\lambda_{2n}(z).$$

Isomorfismo isométrico entre los espacios de Fock y Steinwart:

$$U: \mathcal{F}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{C}^n), \quad (Uf)(z) := f(z) e^{-\pi z^2} = f(z) \exp\left(-\pi \sum_{j=1}^n z_j^2\right).$$

Núcleo reproductor de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$:

$$K_z^{\mathcal{S}}(w) = \underbrace{e^{2\pi \langle w, z \rangle}}_{K_z^{\mathcal{F}}(w)} e^{-\pi w^2} e^{-\pi \bar{z}^2} = e^{-\pi (w - \bar{z})^2} = \exp\left(-\pi \sum_{j=1}^n (w_j - \bar{z}_j)^2\right).$$

Descripción de $\mathcal{H}$ en términos de $\mathcal{S}$

Steinwart, Hush y Scovel demostraron que

$$\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \upharpoonright_{\mathbb{R}^n} : f \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^n) \right\}.$$

Idea de demostración: el núcleo $K^{\mathcal{H}}$ se obtiene al restringir el núcleo $K^{\mathcal{S}}$.

$$K_z^{\mathcal{S}}(w) = e^{-\pi(w-\bar{z})^2}, \quad K_x^{\mathcal{H}}(y) = e^{-\pi|y-x|^2}.$$

Observación: la correspondencia $f \mapsto f \upharpoonright_{\mathbb{R}^n}$ es inyectiva.

Idea: la serie de Taylor de f se determina por las derivadas parciales de $f \upharpoonright_{\mathbb{R}^n}$.

Plan

- 1 Introducción
- 2 Descripción en términos de funciones analíticas
- 3 Descripción por medio de la transformada de Fourier**
- 4 Bases ortonormales
- 5 Descripción en términos de convoluciones

Egor Maximenko, con Jesús Alberto Flores Hinostrosa y Maribel Loaiza Leyva.
Descripción del espacio de Steinwart, Hush y Scovel por medio de la transformada de Fourier.

La función de Gauss y la integral de Gauss–Poisson

Para cada c en $\mathbb{R}$, definimos $G_c: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$G_c(s) := e^{c|s|^2} = \exp \left(c \sum_{j=1}^n s_j^2 \right).$$

$\lambda_n :=$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Para $A > 0$, $B \in \mathbb{C}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_{-A} d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-A|s|^2} d\lambda_n(s) = \left(\frac{\pi}{A} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-A|s|^2 + 2\langle B, s \rangle} d\lambda_n(s) = \left(\frac{\pi}{A} \right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{B^2}{A}}.$$

Espacio $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$

Definimos en $\mathbb{R}^n$ la medida

$$d\eta := G_\pi d\lambda_n, \quad \text{esto es,} \quad d\eta(s) = e^{\pi|s|^2} ds_1 \cdots ds_n.$$

Consideramos el espacio $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$:

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)} = \int_{\mathbb{R}^n} u(s) \overline{v(s)} e^{\pi|s|^2} d\lambda_n(s).$$

Espacio $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$

Definimos en $\mathbb{R}^n$ la medida

$$d\eta := G_\pi d\lambda_n, \quad \text{esto es,} \quad d\eta(s) = e^{\pi|s|^2} ds_1 \cdots ds_n.$$

Consideramos el espacio $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$:

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)} = \int_{\mathbb{R}^n} u(s) \overline{v(s)} e^{\pi|s|^2} d\lambda_n(s).$$

Notamos que $L^2(\mathbb{R}^n, \eta) \subsetneq L^1(\mathbb{R}^n)$.

Por lo tanto, podemos aplicar la transformada de Fourier a los elementos de $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$.

Preimagen de K_a bajo la transformada de Fourier

Para cada a en $\mathbb{R}^n$, definimos $Q_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$,

$$Q_a(s) := e^{-\pi|s|^2 + 2\pi i \langle a, s \rangle}.$$

Lema

$Q_a \in L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ y

$$FQ_a = K_a.$$

Para la demostración, usamos la integral de Gauss–Poisson:

$$(FQ_a)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|s|^2 + 2\pi i \langle a-x, s \rangle} d\lambda_n(s) = e^{-\pi|x-a|^2} = K_a(x).$$

Descripción de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ en términos de la transformada de Fourier

Teorema 1

$\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) = F(L^2(\mathbb{R}^n, \eta))$. Más aún,

$$\langle Fu, Fv \rangle_{\mathcal{H}} = \langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)}.$$

Descripción de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ en términos de la transformada de Fourier

Teorema 1

$\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) = F(L^2(\mathbb{R}^n, \eta))$. Más aún,

$$\langle Fu, Fv \rangle_{\mathcal{H}} = \langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)}.$$

$\Phi :=$ la transformada de Fourier “comprimida” al dominio $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ y codominio $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$:

$$\Phi: L^2(\mathbb{R}^n, \eta) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^n), \quad \Phi u := Fu.$$

Entonces, Φ es un isomorfismo isométrico.

Demostración

Definimos $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$ como la imagen de $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ bajo la transformada de Fourier:

$$\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) := F(L^2(\mathbb{R}^n, \eta)), \quad \langle Fu, Fv \rangle_{\mathcal{H}_1} := \langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)}.$$

Demostración

Definimos $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$ como la imagen de $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ bajo la transformada de Fourier:

$$\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) := F(L^2(\mathbb{R}^n, \eta)), \quad \langle Fu, Fv \rangle_{\mathcal{H}_1} := \langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)}.$$

Para cada a en $\mathbb{R}^n$,

$$K_a = F(Q_a) \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n).$$

Demostración

Definimos $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$ como la imagen de $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ bajo la transformada de Fourier:

$$\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) := F(L^2(\mathbb{R}^n, \eta)), \quad \langle Fu, Fv \rangle_{\mathcal{H}_1} := \langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)}.$$

Para cada a en $\mathbb{R}^n$,

$$K_a = F(Q_a) \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n).$$

Más aún, para cada u en $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ y $f = Fu$,

$$\langle f, K_a \rangle_{\mathcal{H}_1}$$

Demostración

Definimos $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$ como la imagen de $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ bajo la transformada de Fourier:

$$\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) := F(L^2(\mathbb{R}^n, \eta)), \quad \langle Fu, Fv \rangle_{\mathcal{H}_1} := \langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)}.$$

Para cada a en $\mathbb{R}^n$,

$$K_a = F(Q_a) \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n).$$

Más aún, para cada u en $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ y $f = Fu$,

$$\langle f, K_a \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle Fu, FQ_a \rangle_{\mathcal{H}_1}$$

Demostración

Definimos $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$ como la imagen de $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ bajo la transformada de Fourier:

$$\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) := F(L^2(\mathbb{R}^n, \eta)), \quad \langle Fu, Fv \rangle_{\mathcal{H}_1} := \langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)}.$$

Para cada a en $\mathbb{R}^n$,

$$K_a = F(Q_a) \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n).$$

Más aún, para cada u en $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ y $f = Fu$,

$$\langle f, K_a \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle Fu, FQ_a \rangle_{\mathcal{H}_1} =$$

Demostración

Definimos $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$ como la imagen de $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ bajo la transformada de Fourier:

$$\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) := F(L^2(\mathbb{R}^n, \eta)), \quad \langle Fu, Fv \rangle_{\mathcal{H}_1} := \langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)}.$$

Para cada a en $\mathbb{R}^n$,

$$K_a = F(Q_a) \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n).$$

Más aún, para cada u en $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ y $f = Fu$,

$$\langle f, K_a \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle Fu, FQ_a \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle u, Q_a \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)}$$

Demostración

Definimos $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$ como la imagen de $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ bajo la transformada de Fourier:

$$\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) := F(L^2(\mathbb{R}^n, \eta)), \quad \langle Fu, Fv \rangle_{\mathcal{H}_1} := \langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)}.$$

Para cada a en $\mathbb{R}^n$,

$$K_a = F(Q_a) \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n).$$

Más aún, para cada u en $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ y $f = Fu$,

$$\begin{aligned} \langle f, K_a \rangle_{\mathcal{H}_1} &= \langle Fu, FQ_a \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle u, Q_a \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)} \\ &= \end{aligned}$$

Demostración

Definimos $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$ como la imagen de $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ bajo la transformada de Fourier:

$$\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) := F(L^2(\mathbb{R}^n, \eta)), \quad \langle Fu, Fv \rangle_{\mathcal{H}_1} := \langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)}.$$

Para cada a en $\mathbb{R}^n$,

$$K_a = F(Q_a) \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n).$$

Más aún, para cada u en $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ y $f = Fu$,

$$\begin{aligned} \langle f, K_a \rangle_{\mathcal{H}_1} &= \langle Fu, FQ_a \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle u, Q_a \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(s) e^{-\pi|s|^2 - 2\pi i \langle a, s \rangle} e^{\pi|s|^2} d\lambda_n(s) \end{aligned}$$

Demostración

Definimos $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$ como la imagen de $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ bajo la transformada de Fourier:

$$\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) := F(L^2(\mathbb{R}^n, \eta)), \quad \langle Fu, Fv \rangle_{\mathcal{H}_1} := \langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)}.$$

Para cada a en $\mathbb{R}^n$,

$$K_a = F(Q_a) \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n).$$

Más aún, para cada u en $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ y $f = Fu$,

$$\begin{aligned} \langle f, K_a \rangle_{\mathcal{H}_1} &= \langle Fu, FQ_a \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle u, Q_a \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(s) e^{-\pi|s|^2 - 2\pi i \langle a, s \rangle} e^{\pi|s|^2} d\lambda_n(s) = \end{aligned}$$

Demostración

Definimos $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$ como la imagen de $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ bajo la transformada de Fourier:

$$\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) := F(L^2(\mathbb{R}^n, \eta)), \quad \langle Fu, Fv \rangle_{\mathcal{H}_1} := \langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)}.$$

Para cada a en $\mathbb{R}^n$,

$$K_a = F(Q_a) \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n).$$

Más aún, para cada u en $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ y $f = Fu$,

$$\begin{aligned} \langle f, K_a \rangle_{\mathcal{H}_1} &= \langle Fu, FQ_a \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle u, Q_a \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(s) e^{-\pi|s|^2 - 2\pi i \langle a, s \rangle} e^{\pi|s|^2} d\lambda_n(s) = (Fu)(a) \end{aligned}$$

Demostración

Definimos $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$ como la imagen de $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ bajo la transformada de Fourier:

$$\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) := F(L^2(\mathbb{R}^n, \eta)), \quad \langle Fu, Fv \rangle_{\mathcal{H}_1} := \langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)}.$$

Para cada a en $\mathbb{R}^n$,

$$K_a = F(Q_a) \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n).$$

Más aún, para cada u en $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ y $f = Fu$,

$$\begin{aligned} \langle f, K_a \rangle_{\mathcal{H}_1} &= \langle Fu, FQ_a \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle u, Q_a \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(s) e^{-\pi|s|^2 - 2\pi i \langle a, s \rangle} e^{\pi|s|^2} d\lambda_n(s) = (Fu)(a) = \end{aligned}$$

Demostración

Definimos $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$ como la imagen de $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ bajo la transformada de Fourier:

$$\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) := F(L^2(\mathbb{R}^n, \eta)), \quad \langle Fu, Fv \rangle_{\mathcal{H}_1} := \langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)}.$$

Para cada a en $\mathbb{R}^n$,

$$K_a = F(Q_a) \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n).$$

Más aún, para cada u en $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ y $f = Fu$,

$$\begin{aligned} \langle f, K_a \rangle_{\mathcal{H}_1} &= \langle Fu, FQ_a \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle u, Q_a \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(s) e^{-\pi|s|^2 - 2\pi i \langle a, s \rangle} e^{\pi|s|^2} d\lambda_n(s) = (Fu)(a) = f(a). \end{aligned}$$

Demostración

Definimos $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$ como la imagen de $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ bajo la transformada de Fourier:

$$\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) := F(L^2(\mathbb{R}^n, \eta)), \quad \langle Fu, Fv \rangle_{\mathcal{H}_1} := \langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)}.$$

Para cada a en $\mathbb{R}^n$,

$$K_a = F(Q_a) \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n).$$

Más aún, para cada u en $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ y $f = Fu$,

$$\begin{aligned} \langle f, K_a \rangle_{\mathcal{H}_1} &= \langle Fu, FQ_a \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle u, Q_a \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(s) e^{-\pi|s|^2 - 2\pi i \langle a, s \rangle} e^{\pi|s|^2} d\lambda_n(s) = (Fu)(a) = f(a). \end{aligned}$$

Hemos demostrado que K es el NR de $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$.

Demostración

Definimos $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$ como la imagen de $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ bajo la transformada de Fourier:

$$\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) := F(L^2(\mathbb{R}^n, \eta)), \quad \langle Fu, Fv \rangle_{\mathcal{H}_1} := \langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)}.$$

Para cada a en $\mathbb{R}^n$,

$$K_a = F(Q_a) \in \mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n).$$

Más aún, para cada u en $L^2(\mathbb{R}^n, \eta)$ y $f = Fu$,

$$\begin{aligned} \langle f, K_a \rangle_{\mathcal{H}_1} &= \langle Fu, FQ_a \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle u, Q_a \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n, \eta)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(s) e^{-\pi|s|^2 - 2\pi i \langle a, s \rangle} e^{\pi|s|^2} d\lambda_n(s) = (Fu)(a) = f(a). \end{aligned}$$

Hemos demostrado que K es el NR de $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, $\mathcal{H}_1(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$.

Descripción del espacio $\mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$ usando la transformada extendida de Fourier

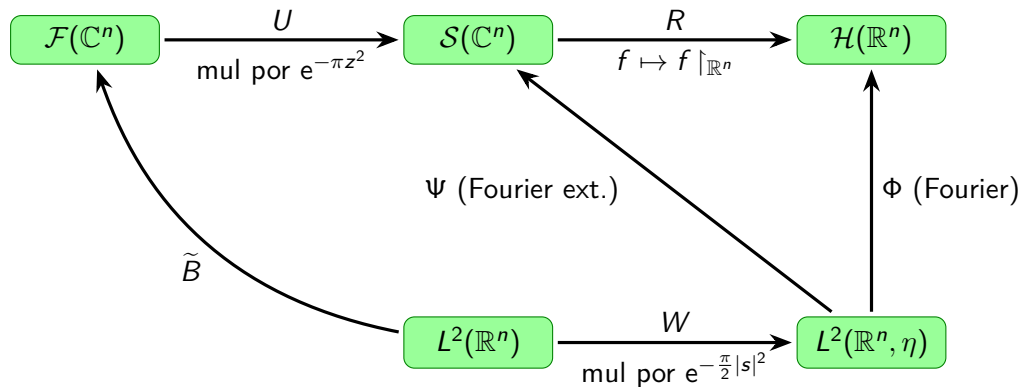
$$\Psi: L^2(\mathbb{R}^n, \eta) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{C}^n),$$

$$(\Psi u)(z) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle z, s \rangle} u(s) d\lambda_n(s) \quad (z \in \mathbb{C}^n).$$

Teorema 2

Ψ es un isomorfismo isométrico.

Conexión entre varios espacios



$$(\tilde{B}u)(z) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi z^2 - 2\pi i \langle z, s \rangle - \frac{\pi}{2}|s|^2} u(s) d\lambda_n(s).$$

Plan

- 1 Introducción
- 2 Descripción en términos de funciones analíticas
- 3 Descripción por medio de la transformada de Fourier
- 4 Bases ortonormales**
- 5 Descripción en términos de convoluciones

Egor Maximenko, con Jesús Alberto Flores Hinostrosa y Maribel Loaiza Leyva.
Descripción del espacio de Steinwart, Hush y Scovel por medio de la transformada de Fourier.

Bases ortonormales

Los monomios normalizados forman una base de $\mathcal{F}(\mathbb{C}^n)$:

$$\frac{(2\pi)^{\frac{|j|}{2}}}{\sqrt{j!}} z^j \quad (j \in \mathbb{N}_0, z \in \mathbb{C}^n).$$

Polinomios de Hermite en varias variables:

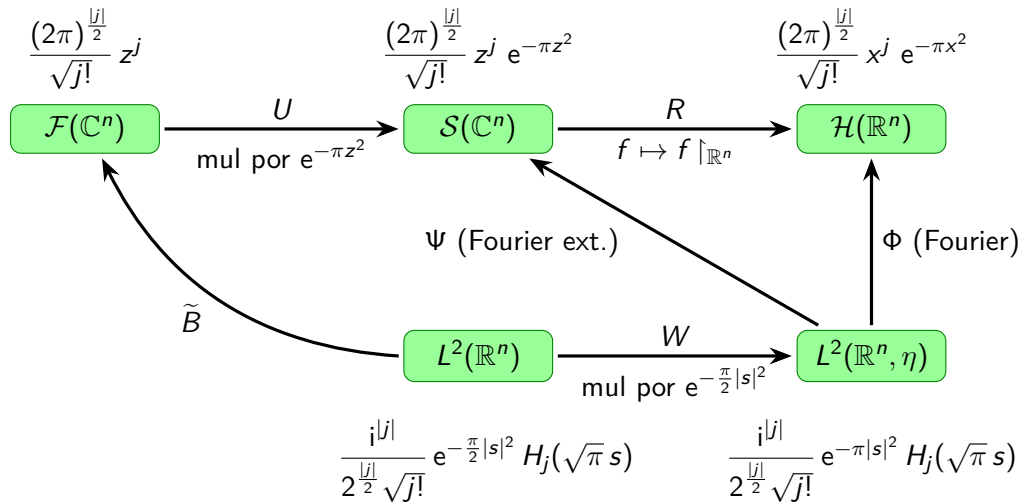
$$H_j(s) := (-1)^{|j|} G_1(s)(D^j G_{-1})(s) \quad (j \in \mathbb{N}_0^n, s \in \mathbb{R}^n).$$

Una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$i^{|j|} \frac{1}{2^{\frac{|j|}{2}} \sqrt{j!}} e^{-\frac{\pi}{2}|s|^2} H_j(\sqrt{\pi} s) \quad (j \in \mathbb{N}_0^n, s \in \mathbb{R}^n).$$

Necesitamos el coeficiente $i^{|j|}$ para la compatibilidad con nuestros isomorfismos isométricos.

Bases ortonormales



Plan

- 1 Introducción
- 2 Descripción en términos de funciones analíticas
- 3 Descripción por medio de la transformada de Fourier
- 4 Bases ortonormales
- 5 Descripción en términos de convoluciones

Egor Maximenko, con Jesús Alberto Flores Hinostrosa y Maribel Loaiza Leyva.
Descripción del espacio de Steinwart, Hush y Scovel por medio de la transformada de Fourier.

Descripción del espacio $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ en términos de convoluciones

Definimos $C: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$,

$$C f := 2^{\frac{n}{2}} G_{-2\pi} * f.$$

De manera más explícita,

$$(C f)(x) = 2^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|x-y|^2} f(y) d\lambda_n(y).$$

Teorema 3

C es un isomorfismo isométrico.

Ejemplo de Cf

