El núcleo reproductor del espacio de funciones polianalíticas sobre la bola

Egor Maximenko,
resultados conjuntos con
Christian Rene Leal Pacheco y Gerardo Ramos Vazquez

Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Física y Matemáticas, México

2024-03-15, Seminario de Análisis,
UNAM, Instituto de Matemáticas, Cuernavaca

Plan

Plan

Funciones polianalíticas en $\mathbb{C}$

El operador de Wirtinger (Cauchy–Riemann):

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, $f\colon X \to \mathbb{C}$ una función suave, $m \in \mathbb{N}$.

Se dice que f es *m-analítica* en Ω, si

$$\frac{\partial^m f}{\partial \overline{z}^m}(z) = 0 \qquad (z \in \Omega).$$

Ejemplo $(m = 3)$: $\quad f(z) = (z^7 + 1) + \exp(z)\,\overline{z} + \cos(z)\,\overline{z}^2.$

Funciones k-analíticas, donde $k \in \mathbb{N}_0^n$

Sea $k \in \mathbb{N}_0^n$. El operador de Wirtinger multidimensional:

$$(\overline{D}^k f)(z) := \frac{\partial^{|k|} f}{\partial^{k_1} \overline{z_1} \cdots \partial^{k_n} \overline{z_n}}(z).$$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y sea $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ suave.

Se dice que f es k-analítica, si

$$(\overline{D}^k f)(z) = 0 \qquad (z \in \Omega).$$

Mark Balk (1991):

Polyanalytic Functions.

Funciones homogéneamente polianalíticas

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^n$ y sea $m \in \mathbb{N}$.

Decimos que una función suave $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es *m-analítica*, si

$$\forall k \in \mathbb{N}_0^n \quad \Big(|k| = m \quad \Longrightarrow \quad \overline{D}^k f = 0 \Big).$$

$\mathcal{A}_m(\Omega) :=$ la clase de todas estas funciones.

Otro término (Daghighi): funciones polianalíticas del orden absoluto m.

Para $m = 1$: funciones analíticas, $\mathcal{A}_1(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$.

Representación de funciones m-analíticas

Teorema 1

$$f \in \mathcal{A}_m(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists h_j \in \mathcal{A}(\Omega) \qquad f(z) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{N}_0^n \\ |j| < m}} h_j(z)\,\overline{z}^j.$$

Ejemplo. Para $n = 2$, $m = 3$,

$$\begin{aligned} f(z) = {} & h_{(0,0)}(z) + h_{(1,0)}(z)\,\overline{z}_1 + h_{(0,1)}(z)\,\overline{z}_2 \\ & + h_{(2,0)}(z)\,\overline{z}_1^2 + h_{(1,1)}(z)\,\overline{z}_1\,\overline{z}_2 + h_{(0,2)}(z)\,\overline{z}_2^2. \end{aligned}$$

Descomposición de funciones *m*-analíticas en series

$$\mathbb{B}_n := \{z \in \mathbb{C}^n \colon \ |z| < 1\}.$$

Corolario

Sean $f \in \mathcal{A}_m(\Omega)$, $a \in \Omega$, $r > 0$ tal que $a + r\mathbb{B}_n \subseteq \Omega$.

Entonces, existen $\beta_{j,k} \in \mathbb{C}$ tales que

$$f(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}_0^n} \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}_0^n \\ |k| < m}} \beta_{j,k} (z - a)^j (\overline{z} - \overline{a})^k.$$

La convergencia es uniforme en subconjuntos compactos de $a + r\mathbb{B}_n$.

Invarianza bajo cambios de variable lineales

Proposición

Sea $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ y sea $f \in \mathcal{A}_m(\Omega)$. Definimos $g \colon M\Omega \to \mathbb{C}$,

$$g(z) \coloneqq f(M^{-1}z).$$

Entonces, $g \in \mathcal{A}_m(M\Omega)$.

Espacio polianalítico de Bergman en $\mathbb{B}_n$

Sea $\alpha > -1$. Consideramos $\mathbb{B}_n$ con la medida

$$\mathrm{d}\mu_\alpha(z) := c_\alpha\,(1 - |z|^2)^\alpha\,\mathrm{d}\mu(z), \qquad c_\alpha := \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\pi^n\,\Gamma(\alpha+1)}.$$

Entonces, $\mu_\alpha(\mathbb{B}_n) = 1$.

$$\mathcal{A}^2_m(\mathbb{B}_n, \mu_\alpha) := \left\{ f \in \mathcal{A}_m(\mathbb{B}_n) \colon \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{B}_n,\mu_\alpha)} < +\infty \right\}.$$

Objetivo: encontrar el núcleo reproductor de $\mathcal{A}^2_m(\mathbb{B}_n, \mu_\alpha)$

Queremos encontrar una familia de funciones $(K_z)_{z\in\mathbb{B}_n}$ tal que:

- $\forall z \in \mathbb{B}_n \qquad K_z \in \mathcal{A}^2_m(\mathbb{B}_n, \mu_\alpha)$,
- $\forall z \in \mathbb{B}_n \qquad \forall f \in \mathcal{A}^2_m(\mathbb{B}_n, \mu_\alpha)$,

$$f(z) = \langle f, K_z \rangle,$$

esto es,

$$f(z) = \int_{\mathbb{B}_n} f(w)\overline{K_z(w)}\,\mathrm{d}\mu_\alpha(w).$$

Trabajos sobre el caso unidimensional

- Koshelev (1977):

  $n = 1$, $\alpha = 0$, núcleo reproductor del espacio $\mathcal{A}^2_m(\mathbb{D}, \mu_0)$.

- Ramazanov (1999):

  $n = 1$, $\alpha = 0$, base ortonormal del espacio $\mathcal{A}^2_m(\mathbb{D}, \mu_0)$.

- Pessoa (2013):

  $n = 1$, $\alpha = 0$, notó la conexión con polinomios de Jacobi.

- Hachadi, Youssfi (2019):

  $n = 1$, α general, núcleo reproductor de $\mathcal{A}^2_m(\mathbb{D}, \mu_\alpha)$.

- Vasilevski (1999):

  $n = 1$, $\mathcal{A}^2_m$ sobre el semiplano superior, aplicó la transf. de Fourier.

Plan

Polinomios de Jacobi

Definición con una fórmula de tipo Rodrigues:

$$P_m^{(\alpha,\beta)}(x) := \frac{(-1)^m}{2^m\, m!}\,(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\ \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\Big((1-x)^{m+\alpha}(1+x)^{m+\beta}\Big).$$

Fórmula explícita:

$$P_m^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{s=0}^{m}(-1)^s\binom{\alpha+\beta+m+s}{s}\binom{\beta+m}{m-s}\left(\frac{x+1}{2}\right)^s.$$

Ortogonalidad

Sean $\alpha, \beta > -1$. Entonces, para $r, s \in \mathbb{N}_0$ con $r \neq s$,

$$\int_{-1}^{1} P_r^{(\alpha,\beta)}(x) P_s^{(\alpha,\beta)}(x) \, (1-x)^{\alpha} \, (1+x)^{\beta} \, \mathrm{d}x = 0.$$

Otra fórmula integral:

$$\int_{-1}^{1} P_m^{(\alpha,\beta+1)}(x) \, (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} \, \mathrm{d}x = 2^{\alpha+\beta+1} (-1)^m \, \mathrm{B}(\alpha+m+1, \beta+1).$$

Demostración: integración por partes y la fórmula de Rodrigues.

Espacio de polinomios de grado $\leq m$ como un EHNR

$\mathcal{P}_m :=$ el espacio de los polinomios de una variable de grado $\leq m$, con el producto interno

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{P}_m} := \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha+1, \beta+1)} \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,(1-t)^\alpha t^\beta \,\mathrm{d}t.$$

Como $\mathcal{P}_m$ es de dimensión finita, tiene un núcleo reproductor.

Utilizaremos solamente la propiedad reproductora en el punto 0.

Propiedad reproductora

Polinomio mágico:

$$R_m^{(\alpha,\beta)}(t) := \frac{(-1)^m \,\mathrm{B}(\alpha+1,\beta+1)}{\mathrm{B}(\alpha+m+1,\beta+1)}\, P_m^{(\alpha,\beta+1)}(2t-1).$$

Proposición

Para cada polinomio h de una variable, con $\operatorname{grado}(h) \le m$,

$$\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha+1,\beta+1)} \int_0^1 h(t) R_m^{(\alpha,\beta)}(t)\,(1-t)^\alpha t^\beta \,\mathrm{d}t = h(0).$$

Demostración: fórmulas integrales anteriores o Christoffel–Darboux.

Plan

Propiedad del valor medio ponderado

Teorema 2

Sea $f \in \mathcal{A}^2_m(\mathbb{B}_n, \mu_\alpha)$. Entonces,

$$f(0) = \int_{\mathbb{B}_n} f(z) R^{(\alpha,n-1)}_{m-1}(|z|^2)\,\mathrm{d}\mu_\alpha(z).$$

Demostración, inicio

Para s en $(0,1)$, consideremos la siguiente integral:

$$I_s := \int_{s\mathbb{B}_n} f(z) R_{m-1}^{(\alpha,n-1)}(|z|^2)\,\mathrm{d}\mu_\alpha(z).$$

Descomponemos f en series de potencias,

luego usamos el cambio de variable $z = r\zeta$, donde $0 \le r < 1$, $\zeta \in \mathbb{S}_n$:

$$f(z) = \sum_{j\in\mathbb{N}_0^n} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}_0^n \\ |k|<m}} \beta_{j,k}\, z^j\, \overline{z}^k = \sum_{j\in\mathbb{N}_0^n} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}_0^n \\ |k|<m}} \beta_{j,k}\, r^{|j|+|k|}\, \zeta^j \overline{\zeta}^k.$$

Demostración, final

$$I_s = c_\alpha \sum_{j \in \mathbb{N}_0^n} \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}_0^n \\ |k| < m}} \beta_{j,k} \left(\int\limits_{\mathbb{S}_n} \zeta^j \overline{\zeta}^k \, \mathrm{d}\mu_{\mathbb{S}_n}(\zeta) \right) \times$$

$$\times \int\limits_0^s r^{2n-1+|j|+|k|} R_{m-1}^{(\alpha,n-1)}(r^2)\,(1-r^2)^\alpha \,\mathrm{d}r$$

$$= c_\alpha \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}_0^n \\ |k| < m}} \beta_{k,k} \cdot \frac{\pi^n\, k!}{(n-1+|k|)!} \int\limits_0^s R_{m-1}^{(\alpha,n-1)}(t)\,(1-t)^\alpha\, t^{n-1+|k|}\,\mathrm{d}t.$$

Pasamos al límite cuando $s \to 1$ y obtenemos $I_1 = \beta_{0,0} = f(0)$.

La propiedad del valor medio ponderado, en otra forma

Hemos demostrado que

$$\forall f \in \mathcal{A}^2_m(\mathbb{B}_n, \mu_\alpha) \qquad f(0) = \int_{\mathbb{B}_n} f(w) R^{(\alpha,n-1)}_{m-1}(|w|^2)\, \mathrm{d}\mu_\alpha(w).$$

Definimos $K_0 \colon \mathbb{B}_n \to \mathbb{C}$,

$$K_0(w) := R^{(\alpha,n-1)}_{m-1}(|w|^2).$$

Obtenemos $K_0 \in \mathcal{A}^2_m(\mathbb{B}_n, \mu_\alpha)$ y

$$\forall f \in \mathcal{A}^2_m(\mathbb{B}_n, \mu_\alpha) \qquad f(0) = \langle f, K_0 \rangle.$$

Plan

Transformación del NR usando un cambio de variable con peso

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c} H_1 \le \mathbb{C}^X, \text{ EH} \\ \mathcal{K} \in H_1 \\ f(a) = \langle f, \mathcal{K} \rangle \end{array} \arrow[rr, "U \text{ isomorfismo isométrico}", "(Uf)(w) := \eta(w) f(\varphi(w))"'] & & H_2 \le \mathbb{C}^Y, \text{ EH} \\
\begin{array}{c} X \\ a \in X \end{array} & & \begin{array}{c} Y \\ b \in Y \end{array} \arrow[ll, "\varphi"', "a = \varphi(b)"]
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{L}(w) := \overline{\eta(b)}\, \eta(w)\, \mathcal{K}(\varphi(w)) \qquad \Longrightarrow \qquad \forall g \in H_2 \quad g(b) = \langle g, \mathcal{L} \rangle.$$

Transformación del NR por un cambio de variable con peso

Proposición

Sean X, Y conjuntos, $H_1 \leq \mathbb{C}^X$, $H_2 \leq \mathbb{C}^Y$ espacios de Hilbert,

- $\varphi\colon Y \to X$, $\eta\colon Y \to \mathbb{C}$,
- $U\colon H_1 \to H_2$ un isomorfismo isométrico tal que

$$(Uf)(w) = \eta(w) f(\varphi(w)) \qquad (f \in H_1,\ w \in Y).$$

- $a \in X$, $b \in Y$, $a = \varphi(b)$,
- $\mathcal{K} \in H_1$ tal que $\forall f \in H_1 \quad f(a) = \langle f, \mathcal{K} \rangle$.
- $\mathcal{L}\colon Y \to \mathbb{C}$, $\quad \mathcal{L}(w) := \overline{\eta(b)}\, \eta(w)\, \mathcal{K}(\varphi(w))$.

Entonces, $\quad \mathcal{L} \in H_2 \quad$ y $\quad \forall g \in H_2 \quad g(b) = \langle g, \mathcal{L} \rangle$.

Nuestro caso: $X = Y = \mathbb{B}_n$, $H_1 = H_2 = \mathcal{A}^2_m(\mathbb{B}_n, \mu_\alpha)$

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{\begin{array}{c} H = \mathcal{A}^2_m(\mathbb{B}_n, \mu_\alpha) \\ K_0 \in H \\ f(0) = \langle f, K_0 \rangle \end{array}} & \xrightarrow[(U_z f)(w) := \eta_z(w) f(\varphi_z(w))]{U_z \text{ unitario}} & \boxed{\begin{array}{c} H = \mathcal{A}^2_m(\mathbb{B}_n, \mu_\alpha) \\ K_z \; = ? \end{array}} \\
\begin{array}{c} X = \mathbb{B}_n \\ 0 \in \mathbb{B}_n \end{array} & \xleftarrow[0 = \varphi_z(z)]{\varphi} & \begin{array}{c} Y = \mathbb{B}_n \\ z \in \mathbb{B}_n \end{array}
\end{array}$$

$$K_z(w) = \overline{\eta_z(b)}\, \eta_z(w)\, K_0(\varphi_z(w)).$$

Falta encontrar φ_z y η_z.

Plan

Transformadas de Möbius (involuciones) de la bola unitaria

Sea $z \in \mathbb{B}_n$. Se define $\varphi_z \colon \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}_n$,

$$\varphi_z(w) := \frac{z - \frac{\langle w,z\rangle}{\langle z,z\rangle} z - \sqrt{1-|z|^2}\left(w - \frac{\langle w,z\rangle}{\langle z,z\rangle} z\right)}{1 - \langle w, z\rangle}.$$

Entonces, $\varphi_z \in \mathcal{A}(\mathbb{B}_n)$,

$$\varphi_z(\varphi_z(w)) = w, \qquad \varphi_z(0) = z, \qquad \varphi_z(z) = 0.$$

Kehe Zhu (2005):
Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball.

La distancia pseudohiperbólica en $\mathbb{B}_n$

$$\rho(z, w) := |\varphi_z(w)|.$$

De manera equivalente,

$$\rho(z, w) = \sqrt{1 - \frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - \langle w, z \rangle|^2}}.$$

Dificultad principal

Si $f \in \mathcal{A}_m(\mathbb{B}_n)$, $z \in \mathbb{B}_n$, entonces no siempre $f \circ \varphi_z \in \mathcal{A}_m(\mathbb{B}_n)$.

Ejemplo. $n = 1$, $m = 6$, $f(w) = \overline{w}^{\,5}$, $\varphi_z(w) = \dfrac{w - z}{1 - \overline{z}\, w}$.

$$f(\varphi_z(w)) = \left(\frac{\overline{w} - \overline{z}}{1 - z\, \overline{w}} \right)^5 .$$

$f \in \mathcal{A}_6(\mathbb{D})$, pero $f \circ \varphi_z \notin \mathcal{A}_6(\mathbb{D})$, por la culpa del denominador.

Idea de Pessoa: multiplicar por $\left(\dfrac{1 - z\, \overline{w}}{1 - \overline{z}\, w} \right)^5$.

Un factor para preservar la propiedad polianalítica

$$p_{m,z}(w) := \left(\frac{1-\langle z,w\rangle}{1-\langle w,z\rangle}\right)^{m-1}.$$

Pessoa (2013), $n = 1$.

Lema

Si $z \in \mathbb{B}_n$ y $f \in \mathcal{A}_m(\mathbb{B}_n)$, entonces

$$(f \circ \varphi_z) \cdot p_{m,z} \in \mathcal{A}_m(\mathbb{B}_n).$$

Un factor para preservar la norma

$g_{\alpha,z}\colon \mathbb{B}_n \to \mathbb{C},$

$$g_{\alpha,z}(w) := \frac{\left(1-|z|^2\right)^{\frac{n+1+\alpha}{2}}}{(1-\langle w,z\rangle)^{n+1+\alpha}}.$$

Lema

$$\left\|(f\circ\varphi_z)\cdot g_{\alpha,z}\right\|_{L^2(\mathbb{B}_n,\mu_\alpha)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{B}_n,\mu_\alpha)}.$$

Un operador unitario para pasar del punto 0 al punto z

Sea $z \in \mathbb{B}_n$. Definimos

$$\eta_z(w) := p_{m,z}(w)\, g_{\alpha,z}(w) f,$$

$$U_z \colon \mathcal{A}^2_m(\mathbb{B}_n, \mu_\alpha) \to \mathcal{A}^2_m(\mathbb{B}_n, \mu_\alpha),$$

$$(U_z f)(w) := f(\varphi_z(w))\eta_z(w).$$

Proposición

U_z es un operador unitario bien definido. Además, $U_z^2 = I$.

El núcleo reproductor de $\mathcal{A}^2_m(\mathbb{B}_n, \mu_\alpha)$

Teorema 3

La siguiente función es el núcleo reproductor de $\mathcal{A}^2_m(\mathbb{B}_n, \mu_\alpha)$:

$$K_z(w) = \frac{(1-\langle z, w\rangle)^{m-1}}{(1-\langle w, z\rangle)^{n+m+\alpha}}\, R^{(\alpha,n-1)}_{m-1}(\rho(z,w)^2).$$

Demostración

$$K_z(w) = \overline{\eta_z(z)}\eta_z(w)K_0(\varphi_z(w)).$$

Es fácil ver que

$$\eta_z(z) = \frac{1}{(1-|z|^2)^{\frac{n+1+\alpha}{2}}},$$

$$\eta_z(w) = \frac{(1-\langle z, w\rangle)^{m-1}(1-|z|^2)^{\frac{n+1+\alpha}{2}}}{(1-\langle w, z\rangle)^{n+m+\alpha}},$$

$$K_0(\varphi_z(w)) = R_{m-1}^{(\alpha,n-1)}(|\varphi_z(w)|^2) = R_{m-1}^{(\alpha,n-1)}(\rho(z,w)^2).$$

Comprobaciones numéricas para n, m pequeños

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{monomios}\\ z_1^{p_1}\cdots z_n^{p_n}\,\overline{z}^{q_1}\cdots\overline{z}^{q_n}\end{array}} \xrightarrow{\text{Gram–Schmidt}} \boxed{\begin{array}{c}\text{base ortonormal}\\ b_{j,k}\end{array}}$$

$$K_z(w) = \sum_{j\in\mathbb{N}_0^n} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}_0^n\\ |k|\le m-1}} \overline{b_{j,k}(z)}\, b_{j,k}(w).$$

Otros resultados cercanos

También calculamos el núcleo reproductor del espacio $\mathcal{A}^2_m$ sobre el siguiente dominio de Siegel:

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^n : \quad \operatorname{Im}(z_n) > \sum_{k=1}^{n-1} |z_k|^2 \right\}.$$

Youssfi (2021):
simultáneamente con nosotros, calculó el NR de $\mathcal{A}^2_m(\mathbb{B}_n, \mu_\alpha)$; además, calculó el NR del espacio poli-Fock sobre $\mathbb{C}^n$.