

Matrices de Toeplitz tetradiagonales generadas por la función

$$a(t) = t^{-1} + t^2.$$

Parte 2: distribución límite de los valores propios

Egor Maximenko, trabajo conjunto con
Sergei Grudsky, Román Higuera García, Fidel Vásquez Rojas

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

Seminario “Matrices de Toeplitz”, 31 de marzo de 2023

- 1 Introducción
- 2 Repaso
- 3 Ceros de $\lambda - a$ y cambios de variable
- 4 Localización de los valores propios
- 5 Distribución asintótica de los valores propios

Plan

- 1 Introducción
- 2 Repaso
- 3 Ceros de $\lambda - a$ y cambios de variable
- 4 Localización de los valores propios
- 5 Distribución asintótica de los valores propios

Objetos de estudio:

matrices de Toeplitz tetradiagonales con diagonales 1, 0, 0, 1

$$a(t) = t^{-1} + t^2 \quad (t \in \mathbb{T}).$$

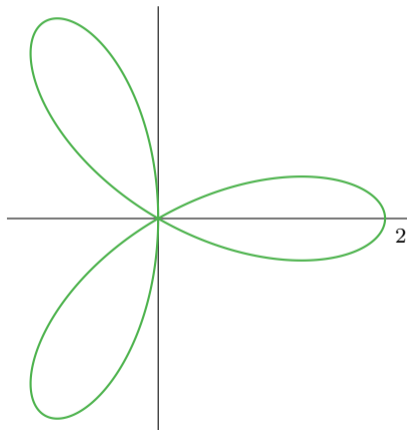
Coeficientes de Fourier de a :

$$a_{-1} = 1, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1.$$

Consideramos las matrices de Toeplitz: $T_n(a) = [a_{j-k}]_{j,k=1}^n$.

$$T_6(a) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

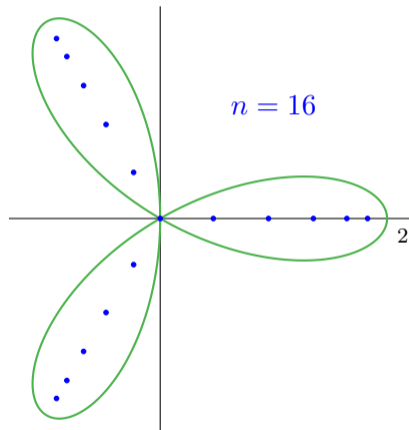
Dibujo: la imagen del símbolo generador y los valores propios



La imagen del símbolo generador,

$$a(e^{i\vartheta}) = e^{-i\vartheta} + e^{2i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Dibujo: la imagen del símbolo generador y los valores propios

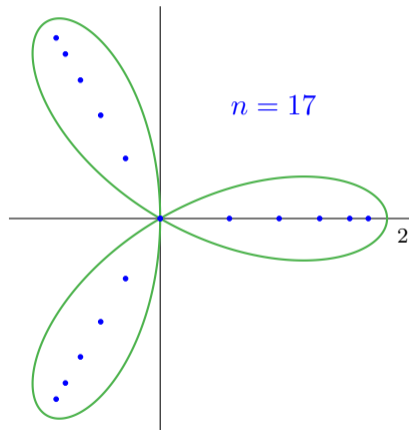


La imagen del símbolo generador,

$$a(e^{i\vartheta}) = e^{-i\vartheta} + e^{2i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Los valores propios de $T_n(a)$,
calculados con algoritmos generales
del sistema Sagemath.

Dibujo: la imagen del símbolo generador y los valores propios

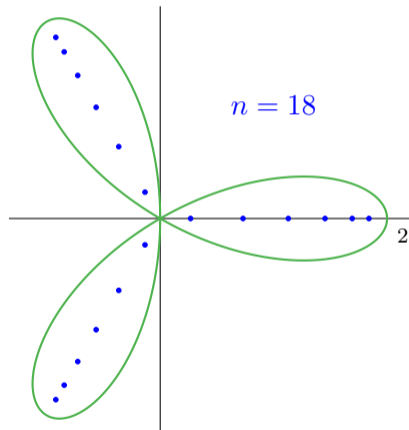


La imagen del símbolo generador,

$$a(e^{i\vartheta}) = e^{-i\vartheta} + e^{2i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Los valores propios de $T_n(a)$,
calculados con algoritmos generales
del sistema Sagemath.

Dibujo: la imagen del símbolo generador y los valores propios

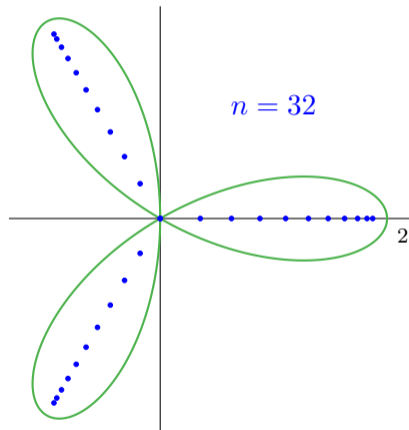


La imagen del símbolo generador,

$$a(e^{i\vartheta}) = e^{-i\vartheta} + e^{2i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Los valores propios de $T_n(a)$,
calculados con algoritmos generales
del sistema Sagemath.

Dibujo: la imagen del símbolo generador y los valores propios

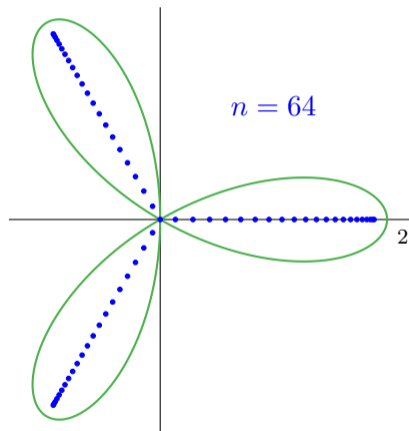


La imagen del símbolo generador,

$$a(e^{i\vartheta}) = e^{-i\vartheta} + e^{2i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Los valores propios de $T_n(a)$,
calculados con algoritmos generales
del sistema Sagemath.

Dibujo: la imagen del símbolo generador y los valores propios

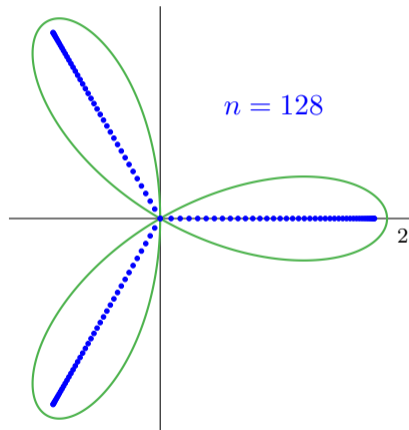


La imagen del símbolo generador,

$$a(e^{i\vartheta}) = e^{-i\vartheta} + e^{2i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Los valores propios de $T_n(a)$,
calculados con algoritmos generales
del sistema Sagemath.

Dibujo: la imagen del símbolo generador y los valores propios

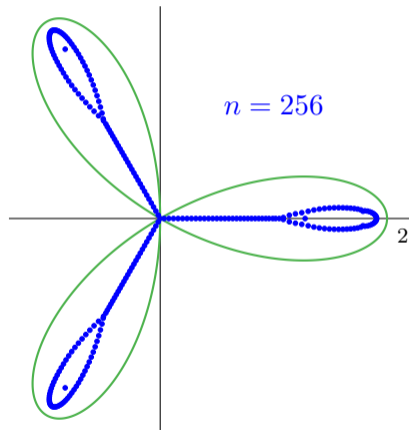


La imagen del símbolo generador,

$$a(e^{i\vartheta}) = e^{-i\vartheta} + e^{2i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Los valores propios de $T_n(a)$,
calculados con algoritmos generales
del sistema Sagemath.

Dibujo: la imagen del símbolo generador y los valores propios



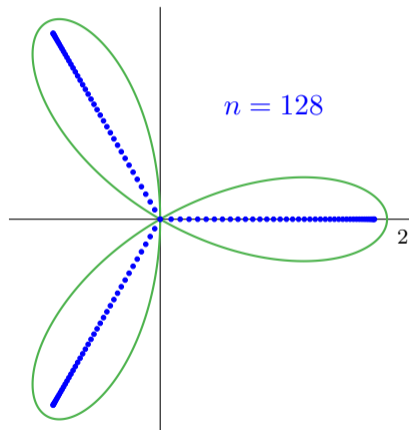
La imagen del símbolo generador,

$$a(e^{i\vartheta}) = e^{-i\vartheta} + e^{2i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Los valores propios de $T_n(a)$,
calculados con algoritmos generales
del sistema Sagemath.

Para n grandes, estos algoritmos generales
no dan la respuesta correcta.

Dibujo: los valores propios verdaderos



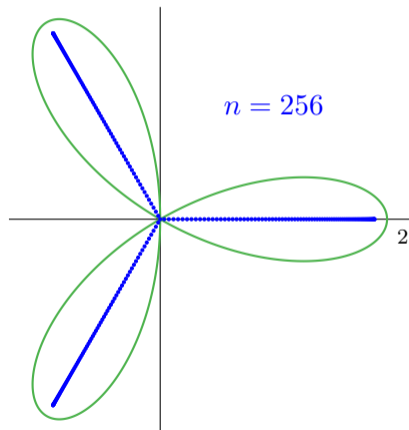
La imagen del símbolo generador,

$$a(e^{i\vartheta}) = e^{-i\vartheta} + e^{2i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Los valores propios verdaderos de $T_n(a)$.

Transformamos la ecuación característica en forma trigonométrica y la resolvemos con métodos numéricos (más adelante).

Dibujo: los valores propios verdaderos



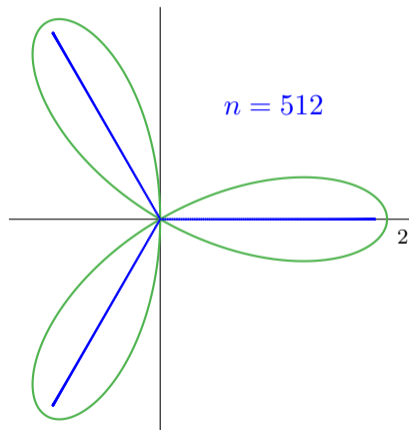
La imagen del símbolo generador,

$$a(e^{i\vartheta}) = e^{-i\vartheta} + e^{2i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Los valores propios verdaderos de $T_n(a)$.

Transformamos la ecuación característica en forma trigonométrica y la resolvemos con métodos numéricos (más adelante).

Dibujo: los valores propios verdaderos



La imagen del símbolo generador,

$$a(e^{i\vartheta}) = e^{-i\vartheta} + e^{2i\vartheta} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Los valores propios verdaderos de $T_n(a)$.

Transformamos la ecuación característica en forma trigonométrica y la resolvemos con métodos numéricos (más adelante).

Plan

- 1 Introducción
- 2 Repaso
- 3 Ceros de $\lambda - a$ y cambios de variable
- 4 Localización de los valores propios
- 5 Distribución asintótica de los valores propios

El polinomio característico de matrices de Toeplitz tetradiagonales

$$a(t) = t^2 + t^{-1}, \quad r = 1, \quad s = 2.$$

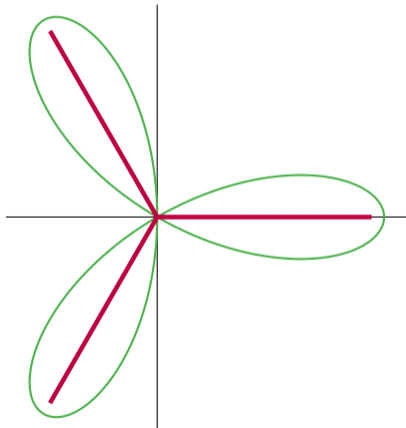
Dado λ en \mathbb{C} , denotamos por $z_1(\lambda)$, $z_2(\lambda)$, $z_3(\lambda)$ a los ceros de $a - \lambda$:

$$\begin{aligned} a(t) - \lambda &= t^2 - \lambda + t^{-1} = t^{-1}(t^3 - \lambda t + 1) \\ &= t^{-1}(t - z_1(\lambda))(t - z_2(\lambda))(t - z_3(\lambda)). \end{aligned}$$

Entonces, por la fórmula de Widom,

$$\det(T_n(a - \lambda)) = \frac{z_1^{n+1} z_2^{n+1}}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)} + \frac{z_1^{n+1} z_3^{n+1}}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_2)} + \frac{z_2^{n+1} z_3^{n+1}}{(z_2 - z_1)(z_3 - z_1)}.$$

El conjunto de Schmidt y Spitzer para nuestro ejemplo



$\Lambda(a)$ es la unión de tres segmentos:

$$\Lambda(a) = [0, L] \cup \varepsilon_3[0, L] \cup \varepsilon_3^2[0, L],$$

donde

$$\varepsilon_3 = e^{\frac{2i\pi}{3}}, \quad L = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

Simetría del espectro de $T_n(a)$ bajo rotación

$$\varepsilon_3 := e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

Proposición

El espectro de $T_n(a)$ es invariante bajo $\frac{2\pi}{3}$ -rotaciones alrededor del origen:

si $\lambda \in \text{sp}(T_n(a))$, entonces $\varepsilon_3 \lambda \in \text{sp}(T_n(a))$.

¿Es $\lambda = 0$ un valor propio de $T_n(a)$?

Proposición

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Escribimos n como $n = 3m + r$, con $m \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, 1, 2\}$.

- Si $r = 0$, entonces 0 no es valor propio de $T_n(a)$.
- Si $r = 1$, entonces 0 es un valor propio de $T_n(a)$ de multiplicidad al menos 1.
- Si $r = 2$, entonces 0 es un valor propio de $T_n(a)$ de mult. algebraica al menos 2.

En realidad, r es exactamente la multiplicidad algebraica del valor propio 0, pero será más cómodo demostrar este hecho después.

Plan

- 1 Introducción
- 2 Repaso
- 3 Ceros de $\lambda - a$ y cambios de variable**
- 4 Localización de los valores propios
- 5 Distribución asintótica de los valores propios

Solución de una ecuación cúbica por medio de funciones hiperbólicas

Lema

Sea $A > 1$. Entonces, los ceros del polinomio

$$4x^3 - 3x - A$$

se escriben en términos de $\eta := \frac{1}{3} \operatorname{arcosh}(A)$ de la siguiente manera:

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \cosh(\eta) \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \sinh(\eta), \quad x_3 = \cosh(\eta).$$

Idea de demostración:

$$\cosh(3\eta) = 4 \cosh^3(\eta) - 3 \cosh(\eta), \quad \sinh(3\eta) = 4 \sinh^3(\eta) + 3 \sinh(\eta).$$

Ceros de $\lambda - a$ en forma hiperbólica

Proposición

Sean $L := 3/\sqrt[3]{4} \approx 1.89$, $0 < \lambda < L$,

$$\nu = \frac{1}{3} \operatorname{arcosh} \left((L/\lambda)^{3/2} \right).$$

Entonces, los ceros del polinomio $z^3 - \lambda z + 1$ son

$$z_{1,2} = \sqrt{\frac{\lambda}{3}} \left(\cosh(\nu) \pm i \sqrt{3} \sinh(\nu) \right), \quad z_3 = -2 \sqrt{\frac{\lambda}{3}} \cosh(\nu).$$

Ceros de $\lambda - a$ en forma hiperbólica

Proposición

Sean $L := 3/\sqrt[3]{4} \approx 1.89$, $0 < \lambda < L$,

$$\nu = \frac{1}{3} \operatorname{arcosh} \left((L/\lambda)^{3/2} \right).$$

Entonces, los ceros del polinomio $z^3 - \lambda z + 1$ son

$$z_{1,2} = \sqrt{\frac{\lambda}{3}} \left(\cosh(\nu) \pm i \sqrt{3} \sinh(\nu) \right), \quad z_3 = -2\sqrt{\frac{\lambda}{3}} \cosh(\nu).$$

Idea de demostración: cambio de variable $z = -2\sqrt{\frac{\lambda}{3}} x$.

Cambio de variable trigonométrico

Por la proposición anterior,

$$z_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{3}} \left(\cosh(\nu) + i\sqrt{3} \sinh(\nu) \right).$$

Calculemos el argumento principal de z_1 :

$$\arg(z_1) = \arctan \frac{\operatorname{Im}(z_1)}{\operatorname{Re}(z_1)} = \arctan \left(\sqrt{3} \tanh(\nu) \right).$$

Denotemos $\arg(z_1)$ por β :

$$\beta := \arctan \left(\sqrt{3} \tanh(\nu) \right).$$

Los ceros de $\lambda - a$ en términos de β

Proposición

Sean $\lambda \in (0, L)$,

$$\beta = \arctan \left(\sqrt{3} \tanh \left(\frac{1}{3} \operatorname{arcosh} \left(\frac{L}{\lambda} \right)^{3/2} \right) \right).$$

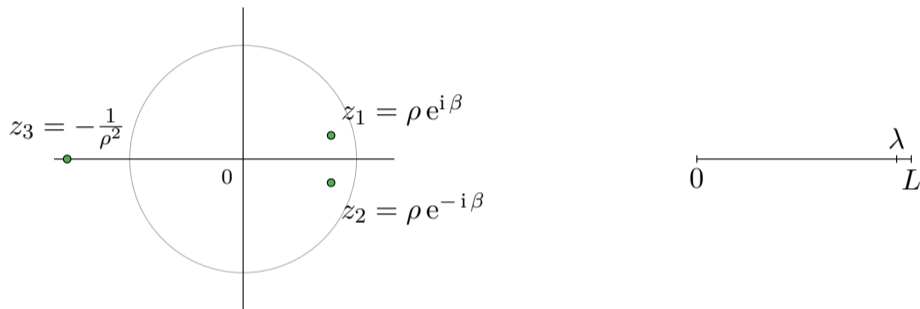
Entonces $\beta \in (0, \pi/3)$,

$$z_1 = \rho e^{i\beta}, \quad z_2 = \rho e^{-i\beta}, \quad z_3 = -\frac{1}{\rho^2},$$

$$\lambda = L \left(1 - \frac{1}{3} \tan^2 \beta \right) (\cos \beta)^{4/3}, \quad \rho = \left(\frac{1}{2 \cos \beta} \right)^{1/3}.$$

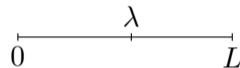
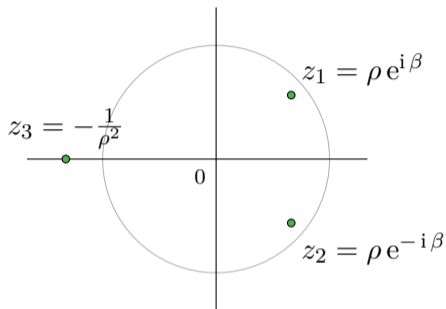
Además, $|z_1| = |z_2| < |z_3|$.

Los números z_1, z_2, z_3 y su dependencia de λ



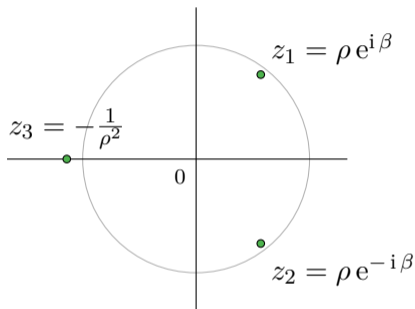
$$\lambda = L \left(1 - \frac{1}{3} \tan^2 \beta \right) (\cos \beta)^{4/3}, \quad \rho = \left(\frac{1}{2 \cos \beta} \right)^{1/3}.$$

Los números z_1, z_2, z_3 y su dependencia de λ

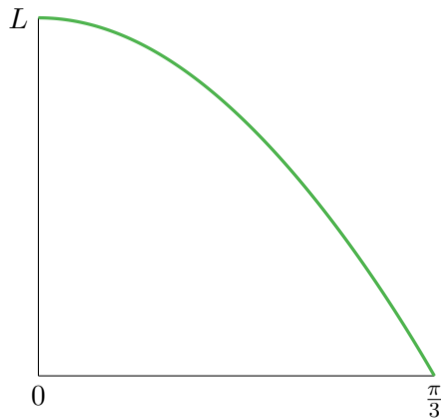


$$\lambda = L \left(1 - \frac{1}{3} \tan^2 \beta \right) (\cos \beta)^{4/3}, \quad \rho = \left(\frac{1}{2 \cos \beta} \right)^{1/3}.$$

Los números z_1 , z_2 , z_3 y su dependencia de λ



$$\lambda = L \left(1 - \frac{1}{3} \tan^2 \beta \right) (\cos \beta)^{4/3}, \quad \rho = \left(\frac{1}{2 \cos \beta} \right)^{1/3}.$$

Dependencia $\beta \mapsto \lambda$ 

$$\beta \mapsto L \left(1 - \frac{1}{3} \tan^2 \beta \right) (\cos \beta)^{4/3}$$

El cambio de variable final: $\alpha = F(\lambda)$, $\lambda = G(\alpha)$

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{3} - \beta \right) = \frac{1}{3} - \frac{\beta}{\pi}.$$

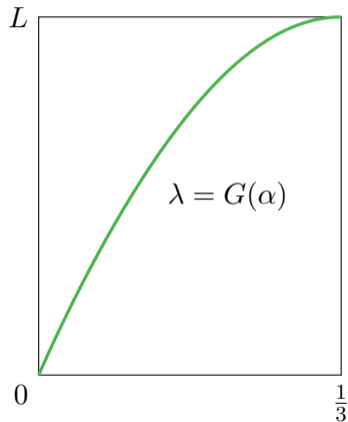
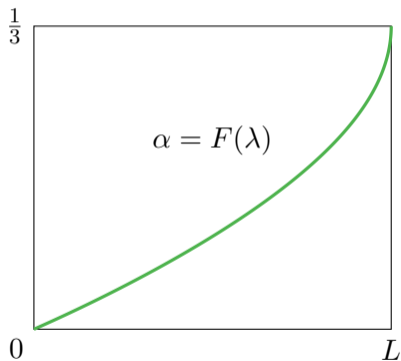
$$F: [0, L] \rightarrow \left[0, \frac{1}{3}\right],$$

$$F(\lambda) := \frac{1}{3} - \frac{1}{\pi} \arctan \left(\sqrt{3} \tanh \left(\frac{1}{3} \operatorname{arcosh} \left(\frac{L}{\lambda} \right)^{3/2} \right) \right).$$

$$G := F^{-1}, \quad G: \left[0, \frac{1}{3}\right] \rightarrow [0, L],$$

$$G(\alpha) = L \left(1 - \frac{1}{3} \tan^2 \left(\frac{\pi}{3} - \pi\alpha \right) \right) \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - \pi\alpha \right) \right)^{4/3}.$$

Gráficas de F y G



Plan

- 1 Introducción
- 2 Repaso
- 3 Ceros de $\lambda - a$ y cambios de variable
- 4 Localización de los valores propios**
- 5 Distribución asintótica de los valores propios

Polinomio característico después del cambio de variable

Usando la fórmula de Widom y expresiones para z_1, z_2, z_3 , obtenemos una fórmula explícita para el polinomio característico.

Polinomio característico después del cambio de variable

Usando la fórmula de Widom y expresiones para z_1, z_2, z_3 , obtenemos una fórmula explícita para el polinomio característico.

Proposición

Sean $0 < \lambda < L$, $\alpha := F(\lambda)$. Entonces

$$\det(T_n(\lambda - a)) = M_n(\alpha)E_n(\alpha),$$

donde $M_n(\alpha)$ es cierto factor no nulo,

$$E_n(\alpha) := \sin \left(\left(n + \frac{3}{2} \right) \pi \alpha + \vartheta(\alpha) + \frac{\pi}{2} - \frac{r\pi}{3} \right) + (-1)^r p(\alpha)q(\alpha)^{n+1}.$$

Aquí ϑ, p, q son ciertas funciones definidas en $(0, 1/3)$.

Fórmulas explícitas para ϑ , p , q

$$E_n(\alpha) := \sin \left(\left(n + \frac{3}{2} \right) \pi \alpha + \pi \vartheta(\alpha) + \frac{\pi}{2} - \frac{r\pi}{3} \right) + (-1)^r p(\alpha) q(\alpha)^{n+1}.$$

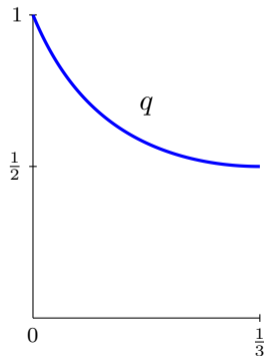
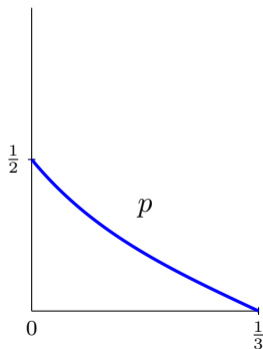
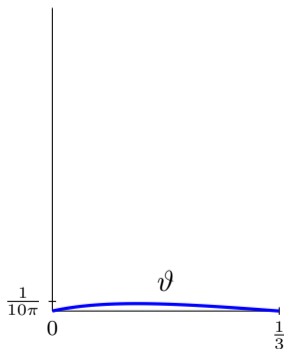
$$\vartheta(\alpha) := \frac{1}{6} - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan \frac{\tan \left(\frac{\pi}{3} - \pi \alpha \right)}{3},$$

$$p(\alpha) := \frac{\tan \left(\frac{\pi}{3} - \pi \alpha \right)}{\sqrt{9 + \tan^2 \left(\frac{\pi}{3} - \pi \alpha \right)}},$$

$$q(\alpha) := \frac{1}{2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - \pi \alpha \right)}.$$

Las funciones ϑ , p , q

$$E_n(\alpha) = \sin \left(\left(n + \frac{3}{2} \right) \pi \alpha + \pi \vartheta(\alpha) + \frac{\pi}{2} - \frac{r\pi}{3} \right) + (-1)^r p(\alpha) q(\alpha)^{n+1}.$$



Localización de los ceros de E_n

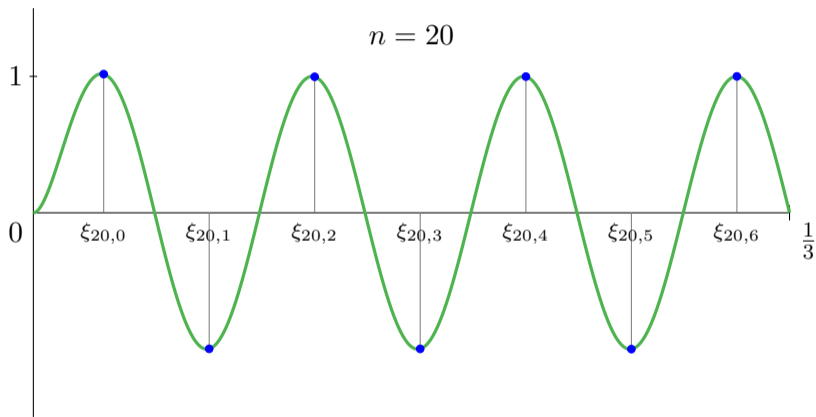
$$\xi_{n,k} := \frac{k + \frac{r}{3}}{n + \frac{3}{2}}.$$

Proposición

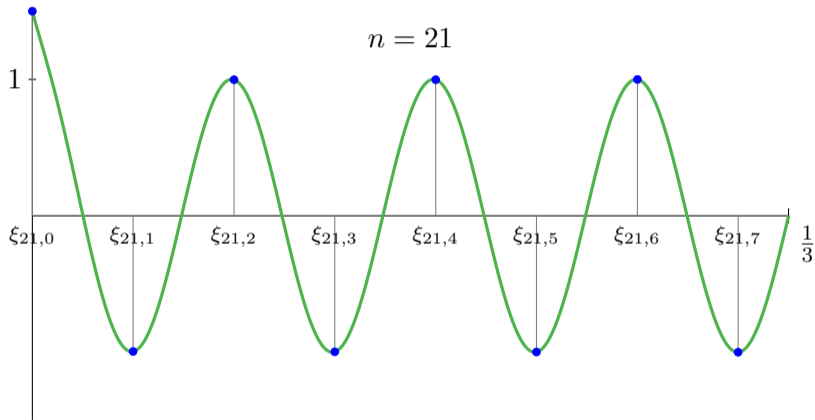
Para cada k en $\{1, \dots, m\}$, la función E_n tiene al menos un cero en

$$\left(\xi_{n,k-1}, \xi_{n,k} \right).$$

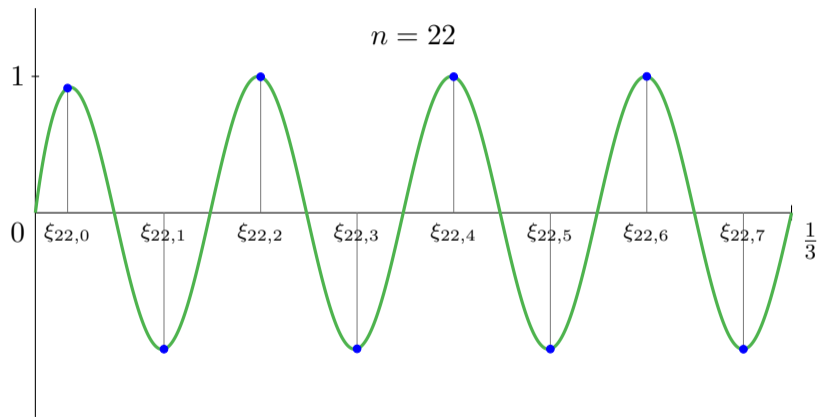
La función E_n y sus valores en los puntos $\xi_{n,k}$



La función E_n y sus valores en los puntos $\xi_{n,k}$



La función E_n y sus valores en los puntos $\xi_{n,k}$



Idea de demostración

$$E_n(\alpha) = \sin\left(\underbrace{\left(n + \frac{3}{2}\right)\pi\alpha + \pi\vartheta(\alpha) + \frac{\pi}{2} - \frac{r\pi}{3}}_{A_n(\alpha)}\right) + \underbrace{(-1)^r p(\alpha)q(\alpha)^{n+1}}_{B_n(\alpha)}.$$

Idea de demostración

$$E_n(\alpha) = \sin\left(\underbrace{\left(n + \frac{3}{2}\right)\pi\alpha + \pi\vartheta(\alpha) + \frac{\pi}{2} - \frac{r\pi}{3}}_{A_n(\alpha)}\right) + \underbrace{(-1)^r p(\alpha)q(\alpha)^{n+1}}_{B_n(\alpha)}.$$

El sumando $B_n(\alpha)$ siempre es acotado por 1/2:

$$|B_n(\alpha)| \leq p(\alpha) \leq \frac{1}{2}.$$

Idea de demostración

$$E_n(\alpha) = \sin\left(\underbrace{\left(n + \frac{3}{2}\right)\pi\alpha + \pi\vartheta(\alpha) + \frac{\pi}{2} - \frac{r\pi}{3}}_{A_n(\alpha)}\right) + \underbrace{(-1)^r p(\alpha)q(\alpha)^{n+1}}_{B_n(\alpha)}.$$

El sumando $B_n(\alpha)$ siempre es acotado por $1/2$:

$$|B_n(\alpha)| \leq p(\alpha) \leq \frac{1}{2}.$$

El sumando $\sin(A_n(\xi_{n,k}))$, donde $\xi_{n,k} = \frac{k + \frac{r}{3}}{n + \frac{3}{2}}$, es cercano a $(-1)^k$:

Idea de demostración

$$E_n(\alpha) = \sin\left(\underbrace{\left(n + \frac{3}{2}\right)\pi\alpha + \pi\vartheta(\alpha) + \frac{\pi}{2} - \frac{r\pi}{3}}_{A_n(\alpha)}\right) + \underbrace{(-1)^r p(\alpha)q(\alpha)^{n+1}}_{B_n(\alpha)}.$$

El sumando $B_n(\alpha)$ siempre es acotado por $1/2$:

$$|B_n(\alpha)| \leq p(\alpha) \leq \frac{1}{2}.$$

El sumando $\sin(A_n(\xi_{n,k}))$, donde $\xi_{n,k} = \frac{k + \frac{r}{3}}{n + \frac{3}{2}}$, es cercano a $(-1)^k$:

$$A_n(\xi_{n,k}) = k\pi + \frac{\pi}{2} + \pi\vartheta(\alpha),$$

Idea de demostración

$$E_n(\alpha) = \sin\left(\underbrace{\left(n + \frac{3}{2}\right)\pi\alpha + \pi\vartheta(\alpha) + \frac{\pi}{2} - \frac{r\pi}{3}}_{A_n(\alpha)}\right) + \underbrace{(-1)^r p(\alpha)q(\alpha)^{n+1}}_{B_n(\alpha)}.$$

El sumando $B_n(\alpha)$ siempre es acotado por $1/2$:

$$|B_n(\alpha)| \leq p(\alpha) \leq \frac{1}{2}.$$

El sumando $\sin(A_n(\xi_{n,k}))$, donde $\xi_{n,k} = \frac{k + \frac{r}{3}}{n + \frac{3}{2}}$, es cercano a $(-1)^k$:

$$A_n(\xi_{n,k}) = k\pi + \frac{\pi}{2} + \pi\vartheta(\alpha), \quad (-1)^k \sin(A_n(\xi_{n,k})) \geq \frac{9}{10}.$$

Idea de demostración

$$E_n(\alpha) = \sin\left(\underbrace{\left(n + \frac{3}{2}\right)\pi\alpha + \pi\vartheta(\alpha) + \frac{\pi}{2} - \frac{r\pi}{3}}_{A_n(\alpha)}\right) + \underbrace{(-1)^r p(\alpha)q(\alpha)^{n+1}}_{B_n(\alpha)}.$$

El sumando $B_n(\alpha)$ siempre es acotado por $1/2$:

$$|B_n(\alpha)| \leq p(\alpha) \leq \frac{1}{2}.$$

El sumando $\sin(A_n(\xi_{n,k}))$, donde $\xi_{n,k} = \frac{k + \frac{r}{3}}{n + \frac{3}{2}}$, es cercano a $(-1)^k$:

$$A_n(\xi_{n,k}) = k\pi + \frac{\pi}{2} + \pi\vartheta(\alpha), \quad (-1)^k \sin(A_n(\xi_{n,k})) \geq \frac{9}{10}.$$

Conclusión: $\text{sgn}(E(\xi_{n,k})) = (-1)^k$.

Localización de los valores propios

Recordamos que $E_n(\alpha) = 0 \iff \det(T_n(\lambda - a)) = 0$, donde $\lambda = G(\alpha)$.

Localización de los valores propios

Recordamos que $E_n(\alpha) = 0 \iff \det(T_n(\lambda - a)) = 0$, donde $\lambda = G(\alpha)$.

Proposición

Para cada k en $\{1, \dots, m\}$, la matriz $T_n(a)$ tiene al menos un valor propio en

$$\left(G(\xi_{n,k-1}), G(\xi_{n,k}) \right).$$

Localización del espectro

Teorema

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n = 3m + r$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, 1, 2\}$.

- $T_n(a)$ tiene m valores propios simples y diferentes a pares en cada uno de los intervalos

$$(0, L), \quad \varepsilon_3(0, L), \quad \varepsilon_3^2(0, L).$$

- Si $r \in \{1, 2\}$, entonces 0 es un valor propio de $T_n(a)$ de multiplicidad algebraica r y multilicidad geométrica 1.

Localización del espectro

Teorema

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n = 3m + r$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, 1, 2\}$.

- $T_n(a)$ tiene m valores propios simples y diferentes a pares en cada uno de los intervalos

$$(0, L), \quad \varepsilon_3(0, L), \quad \varepsilon_3^2(0, L).$$

- Si $r \in \{1, 2\}$, entonces 0 es un valor propio de $T_n(a)$ de multiplicidad algebraica r y multilicidad geométrica 1.

Numeramos de manera ascendente los valores propios que pertenecen a $(0, L)$:

$$\lambda_{n,1} < \dots < \lambda_{n,m}.$$

Primera aproximación de los valores propios

Hemos mostrado que

$$G\left(\frac{k-1+\frac{r}{3}}{n+\frac{3}{2}}\right) < \lambda_{n,k} < G\left(\frac{k+\frac{r}{3}}{n+\frac{3}{2}}\right).$$

Primera aproximación de los valores propios

Hemos mostrado que

$$G\left(\frac{k-1+\frac{r}{3}}{n+\frac{3}{2}}\right) < \lambda_{n,k} < G\left(\frac{k+\frac{r}{3}}{n+\frac{3}{2}}\right).$$

G es suave, por eso $\|G'\|_{\text{sup}} < +\infty$.

Primera aproximación de los valores propios

Hemos mostrado que

$$G\left(\frac{k-1+\frac{r}{3}}{n+\frac{3}{2}}\right) < \lambda_{n,k} < G\left(\frac{k+\frac{r}{3}}{n+\frac{3}{2}}\right).$$

G es suave, por eso $\|G'\|_{\text{sup}} < +\infty$.

Aproximemos $\lambda_{n,k}$ por $G(\alpha_{n,k}^{\text{appr}})$, donde

$$\alpha_{n,k}^{\text{appr}} := \frac{k - \frac{1}{2} + \frac{r}{3}}{n + \frac{3}{2}}.$$

Primera aproximación de los valores propios

Hemos mostrado que

$$G\left(\frac{k-1+\frac{r}{3}}{n+\frac{3}{2}}\right) < \lambda_{n,k} < G\left(\frac{k+\frac{r}{3}}{n+\frac{3}{2}}\right).$$

G es suave, por eso $\|G'\|_{\text{sup}} < +\infty$.

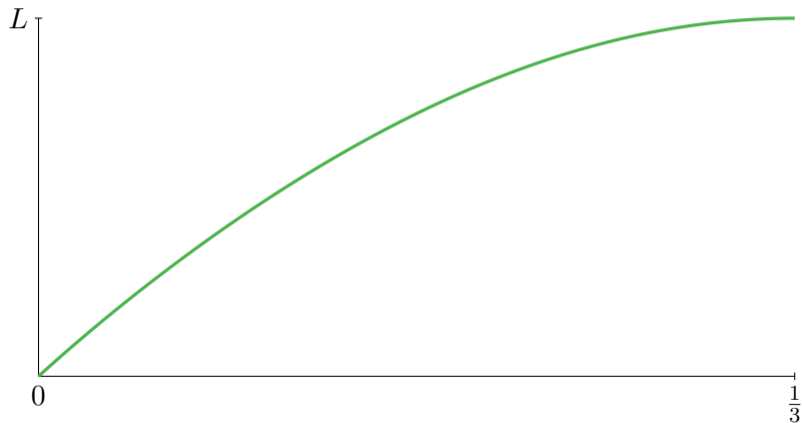
Aproximemos $\lambda_{n,k}$ por $G(\alpha_{n,k}^{\text{appr}})$, donde

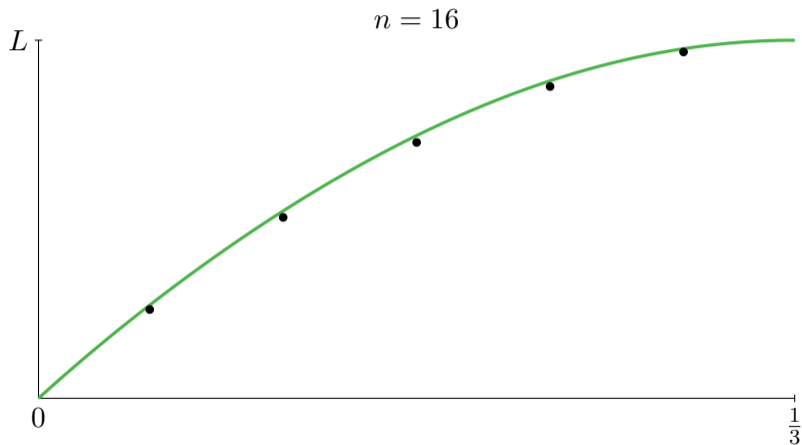
$$\alpha_{n,k}^{\text{appr}} := \frac{k - \frac{1}{2} + \frac{r}{3}}{n + \frac{3}{2}}.$$

Proposición

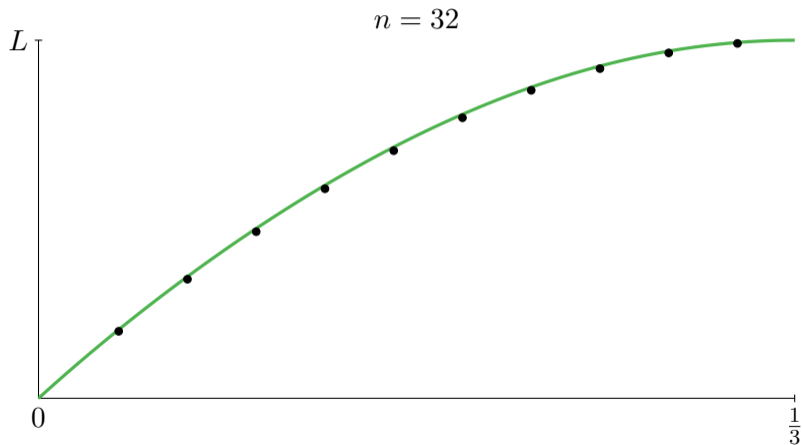
$$\left| \lambda_{n,k} - G\left(\alpha_{n,k}^{\text{appr}}\right) \right| < \frac{\|G'\|_{\text{sup}}}{n + 3/2}.$$

La función G y los puntos $(\alpha_{n,k}^{\text{appr}}, \lambda_{n,k})$

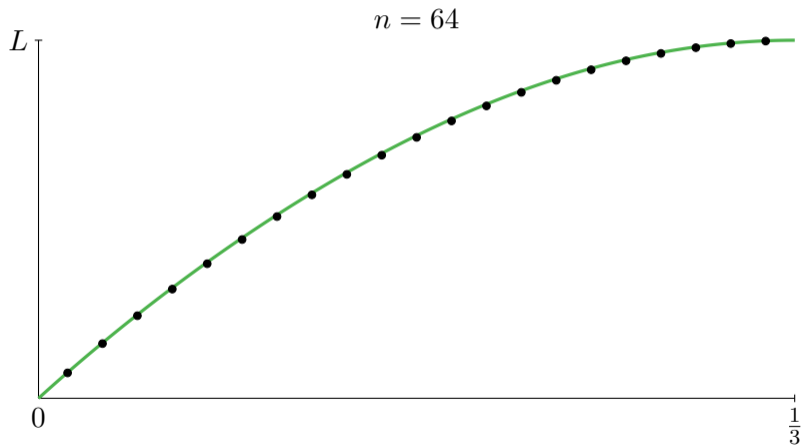


La función G y los puntos $(\alpha_{n,k}^{\text{appr}}, \lambda_{n,k})$ 

La función G y los puntos $(\alpha_{n,k}^{\text{appr}}, \lambda_{n,k})$



La función G y los puntos $(\alpha_{n,k}^{\text{appr}}, \lambda_{n,k})$



Plan

- 1 Introducción
- 2 Repaso
- 3 Ceros de $\lambda - a$ y cambios de variable
- 4 Localización de los valores propios
- 5 Distribución asintótica de los valores propios

Contamos los valores propios que pertenecen a un intervalo $(0, x]$

$$V_n(x) := \#\{k \in \{1, \dots, m\} : 0 < \lambda_{n,k} \leq x\}.$$

Contamos los valores propios que pertenecen a un intervalo $(0, x]$

$$V_n(x) := \#\{k \in \{1, \dots, m\} : 0 < \lambda_{n,k} \leq x\}.$$

Proposición

Para cada $n \geq 3$ y cada x en $[0, L]$,

$$\left(n + \frac{3}{2}\right) F(x) - \frac{2}{3} \leq V_n(x) < \left(n + \frac{3}{2}\right) F(x) + 1.$$

Contamos los valores propios que pertenecen a un intervalo $(0, x]$

$$V_n(x) := \#\{k \in \{1, \dots, m\} : 0 < \lambda_{n,k} \leq x\}.$$

Proposición

Para cada $n \geq 3$ y cada x en $[0, L]$,

$$\left(n + \frac{3}{2}\right) F(x) - \frac{2}{3} \leq V_n(x) < \left(n + \frac{3}{2}\right) F(x) + 1.$$

En particular, esto implica que

$$\left|V_n(x) - \left(n + \frac{3}{2}\right) F(x)\right| < 1.$$

Demostración: $V_n(x) < (n + 3/2) F(x) + 1$

Si $\lambda_{n,k} \leq x$, entonces $\alpha_{n,k} := F(\lambda_{n,k}) \leq F(x)$.

Demostración: $V_n(x) < (n + 3/2) F(x) + 1$

Si $\lambda_{n,k} \leq x$, entonces $\alpha_{n,k} := F(\lambda_{n,k}) \leq F(x)$.

$$F(x) \geq \alpha_{n,k} > \xi_{n,k-1} = \frac{k-1 + \frac{r}{3}}{n + \frac{3}{2}} \geq \frac{k-1}{n + \frac{3}{2}}.$$

Demostración: $V_n(x) < (n + 3/2) F(x) + 1$

Si $\lambda_{n,k} \leq x$, entonces $\alpha_{n,k} := F(\lambda_{n,k}) \leq F(x)$.

$$F(x) \geq \alpha_{n,k} > \xi_{n,k-1} = \frac{k-1 + \frac{r}{3}}{n + \frac{3}{2}} \geq \frac{k-1}{n + \frac{3}{2}}.$$

Acotamos k por arriba:

$$k < \left(n + \frac{3}{2}\right) F(x) + 1.$$

Demostración: $V_n(x) < (n + 3/2) F(x) + 1$

Si $\lambda_{n,k} \leq x$, entonces $\alpha_{n,k} := F(\lambda_{n,k}) \leq F(x)$.

$$F(x) \geq \alpha_{n,k} > \xi_{n,k-1} = \frac{k-1 + \frac{r}{3}}{n + \frac{3}{2}} \geq \frac{k-1}{n + \frac{3}{2}}.$$

Acotamos k por arriba:

$$k < \left(n + \frac{3}{2}\right) F(x) + 1.$$

Acotamos por arriba el conjunto de estos k :

$$\{k: \lambda_{n,k} \leq x\} \subseteq (0, (n + 3/2) F(x) + 1).$$

Demostración: $V_n(x) \geq (n + 3/2) F(x) - \frac{2}{3}$

Supongamos que $k \leq (n + 3/2) F(x) - \frac{2}{3}$.

Demostración: $V_n(x) \geq (n + 3/2) F(x) - \frac{2}{3}$

Supongamos que $k \leq (n + 3/2) F(x) - \frac{2}{3}$.

Entonces, es fácil ver que

$$\xi_{n,k} = \frac{k + \frac{r}{3}}{n + \frac{3}{2}} \leq F(x).$$

Demostración: $V_n(x) \geq (n + 3/2) F(x) - \frac{2}{3}$

Supongamos que $k \leq (n + 3/2) F(x) - \frac{2}{3}$.

Entonces, es fácil ver que

$$\xi_{n,k} = \frac{k + \frac{r}{3}}{n + \frac{3}{2}} \leq F(x).$$

Por lo tanto, $\alpha_{n,k} < F(x)$ y $\lambda_{n,k} < F(x)$.

Demostración: $V_n(x) \geq (n + 3/2) F(x) - \frac{2}{3}$

Supongamos que $k \leq (n + 3/2) F(x) - \frac{2}{3}$.

Entonces, es fácil ver que

$$\xi_{n,k} = \frac{k + \frac{r}{3}}{n + \frac{3}{2}} \leq F(x).$$

Por lo tanto, $\alpha_{n,k} < F(x)$ y $\lambda_{n,k} < F(x)$.

Hemos mostrado que

$$\left(0, (n + 3/2) F(x) - \frac{2}{3}\right] \subseteq \left\{k : \lambda_{n,k} \leq x\right\}.$$

Distribución “empírica” de los valores propios de $T_n(a)$

$$H_n(x) := \frac{V_n(x)}{n} = \frac{\#\{k \in \{1, \dots, m\} : 0 < \lambda_{n,k} \leq x\}}{n}.$$

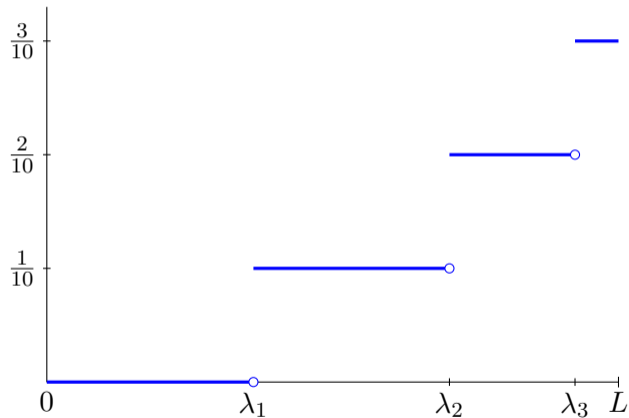
Distribución “empírica” de los valores propios de $T_n(a)$

$$H_n(x) := \frac{V_n(x)}{n} = \frac{\#\{k \in \{1, \dots, m\} : 0 < \lambda_{n,k} \leq x\}}{n}.$$

Ejemplo: $n = 10$. Escribimos λ_k en vez de $\lambda_{10,k}$.

$$H_{10}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x < \lambda_1, \\ \frac{1}{10}, & \text{si } \lambda_1 \leq x < \lambda_2, \\ \frac{2}{10}, & \text{si } \lambda_2 \leq x < \lambda_3, \\ \frac{3}{10}, & \text{si } \lambda_3 \leq x < L. \end{cases}$$

Ejemplo: la gráfica de H_{10}



Distribución límite de los valores propios

Por la proposición anterior,

$$F(x) - \frac{2}{3n} \leq H_n(x) < F(x) + \frac{4}{3n}.$$

Distribución límite de los valores propios

Por la proposición anterior,

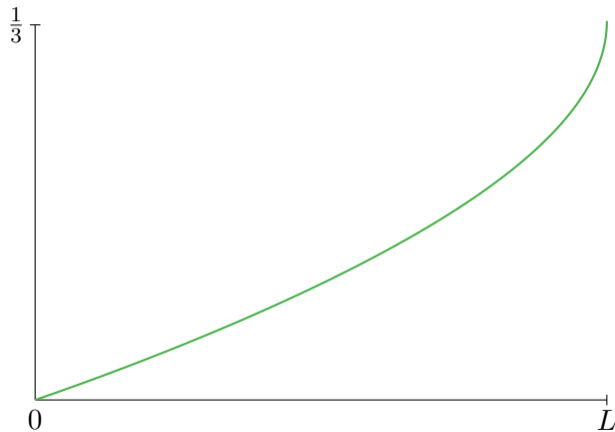
$$F(x) - \frac{2}{3n} \leq H_n(x) < F(x) + \frac{4}{3n}.$$

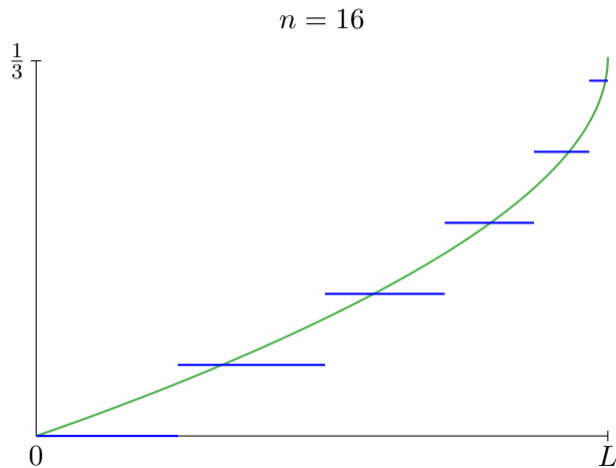
Teorema

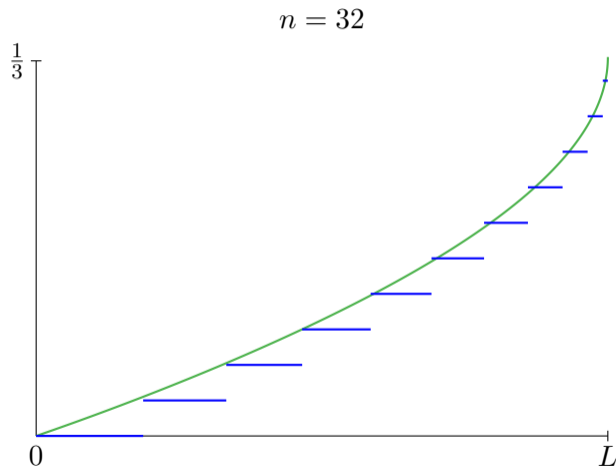
Para cada x en $[0, L]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(x) = F(x).$$

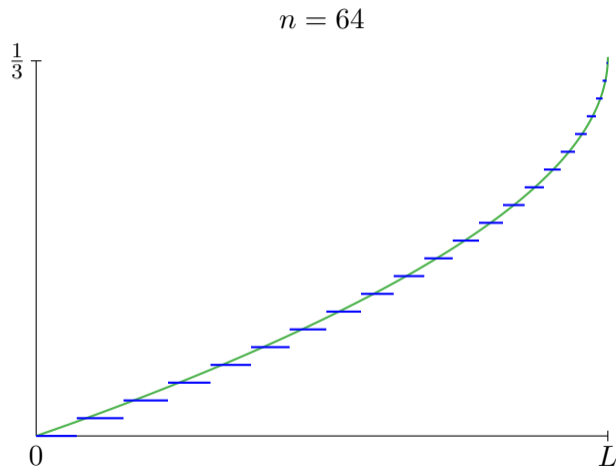
Las gráficas de F y H_n



Las gráficas de F y H_n 

Las gráficas de F y H_n 

Las gráficas de F y H_n



Resumen: ventajas del cambio de variable $\alpha = F(\lambda)$

Resumen: ventajas del cambio de variable $\alpha = F(\lambda)$

- La función F refleja la realidad objetiva:

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k \in \{1, \dots, m\} : 0 < \lambda_{n,k} \leq x\}}{n}.$$

Resumen: ventajas del cambio de variable $\alpha = F(\lambda)$

- La función F refleja la realidad objetiva:

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k \in \{1, \dots, m\} : 0 < \lambda_{n,k} \leq x\}}{n}.$$

- Es una función creciente.

Resumen: ventajas del cambio de variable $\alpha = F(\lambda)$

- La función F refleja la realidad objetiva:

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k \in \{1, \dots, m\} : 0 < \lambda_{n,k} \leq x\}}{n}.$$

- Es una función creciente.
- El punto de ramificación $\lambda = 0$ corresponde al punto $\alpha = 0$, por eso se simplificará un poco el análisis cerca del punto $\lambda = 0$.

Resumen: ventajas del cambio de variable $\alpha = F(\lambda)$

- La función F refleja la realidad objetiva:

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k \in \{1, \dots, m\} : 0 < \lambda_{n,k} \leq x\}}{n}.$$

- Es una función creciente.
- El punto de ramificación $\lambda = 0$ corresponde al punto $\alpha = 0$, por eso se simplificará un poco el análisis cerca del punto $\lambda = 0$.

Una desventaja:

- Se complicará un poco la fórmula asintótica para $\lambda_{n,j}$ lejanos del origen.