Valores propios de matrices laplacianas asociadas a ciclos con un arista ponderada

Egor Maximenko, trabajo conjunto con
Alejandro Soto González y Sergei Grudsky

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

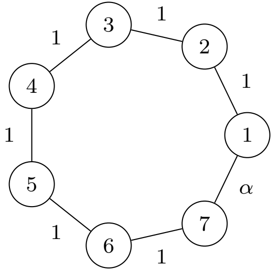
XXIX Jornadas de Análisis Matemático y sus Aplicaciones,
UAM Azcapotzalco, 16 de noviembre de 2023

1. Introducción
2. Análisis de la ecuación característica
3. Expansión asintótica
4. Vectores propios
5. Otros valores de α

Plan

1. Introducción
2. Análisis de la ecuación característica
3. Expansión asintótica
4. Vectores propios
5. Otros valores de α

La matriz laplaciana asociada a un ciclo con una arista ponderada



$$L_{\alpha,7} = \begin{bmatrix} 1+\alpha & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1+\alpha \end{bmatrix}.$$

Objetivo: entender el comportamiento de los valores y vectores propios de $L_{\alpha,n}$.

$$\lambda_{n,1} \leq \lambda_{n,2} \leq \ldots \leq \lambda_{n,n}.$$

Motivación: ecuaciones de calor y de onda sobre grafos

$$f'(t) = -c\,L_{\alpha,n} f(t), \qquad f''(t) = c\,L_{\alpha,n} f(t),$$

donde c es un coeficiente y f es una función vectorial incógnita:

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

La descomposición espectral de $L_{\alpha,n}$ es crucial para resolver estas ecuaciones.

Cotas triviales para los valores propios

En lo que sigue, suponemos que $0 < \alpha < 1$.

$$L_{\alpha,7} = \begin{bmatrix} 1+\alpha & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1+\alpha \end{bmatrix}.$$

Aplicamos el teorema de Gershgorin y obtenemos

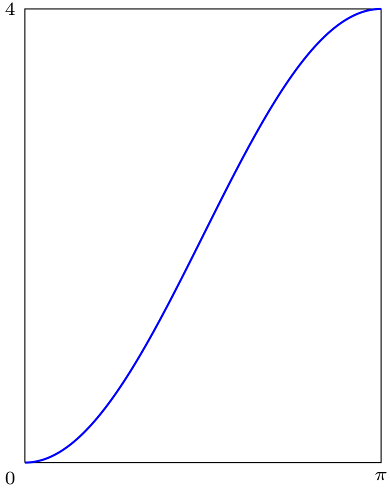
$$0 \le \lambda_{n,1} \le \ldots \le \lambda_{n,n} \le 4.$$

Función g

$$g(x) := 4\sin^2\frac{x}{2} = 2 - 2\cos(x).$$

Es el polinomio de Fourier
con coeficientes $-1, 2, -1$:

$$g(x) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x} + 2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}.$$



Caso particular: $\alpha = 0$

$$L_{0,6} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_{n,j} = 4\sin^2 \frac{\pi(j-1)}{2n} = g\left(\frac{(j-1)\pi}{n}\right).$$

Vectores propios: columnas de DCT-II (transformada de coseno discreta).

Otra matriz cercana: matriz tridiagonal de Toeplitz

$$T_6 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \lambda_{n,j} = 4\sin^2 \frac{j\pi}{2(n+1)} = g\left(\frac{j\pi}{n+1}\right).$$

Vectores propios: columnas de DST-I (transformada de seno discreta).

Polinomio característico se expresa en términos de polinomios de Chebyshov:

$$\det(\lambda I_n - T_n) = U_n\left(\frac{\lambda - 2}{2}\right).$$

Cambio de variable natural

$$\lambda_{n,j} = g(\vartheta_{n,j}).$$

En lugar de $\lambda_{n,j}$, buscaremos $\vartheta_{n,j}$:

$$0 \le \vartheta_{n,1} \le \ldots \le \vartheta_{n,n} \le \pi.$$

Plan

1. Introducción
2. Análisis de la ecuación característica
3. Expansión asintótica
4. Vectores propios
5. Otros valores de α

Polinomio característico de $L_{\alpha,n}$

$$D_{\alpha,n}(\lambda) := \det(\lambda I_n - L_{\alpha,n}).$$

$$D_{\alpha,n}(\lambda) = (\lambda - 2\alpha)U_{n-1}\left(\frac{\lambda-2}{2}\right) - 2\alpha U_{n-2}\left(\frac{\lambda-2}{2}\right) + 2\,(-1)^{n+1}\alpha.$$

Idea de demostración: expansión por cofactores.

Hacemos el cambio de variable $\lambda = g(x) = 4\sin^2\frac{x}{2}$:

$$D_{\alpha,n}(g(x)) = (-1)^{n+1}\frac{4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\left((1-\alpha)\cos\frac{nx}{2} + \alpha\,\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,\cos\frac{x}{2}\right).$$

Transformación de la ecuación característica

$$\frac{4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\left((1-\alpha)\cos\frac{nx}{2}+\alpha\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}\right)=0.$$

Raíces triviales:

$$x=0,\quad x=\frac{2\pi}{n},\quad x=\frac{4\pi}{n},\quad \ldots.$$

Para encontrar otras raíces, hay que resolver la siguiente ecuación:

$$(1-\alpha)\cos\frac{nx}{2}+\alpha\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}=0.$$

Transformación de la ecuación característica

$$(1-\alpha)\cos\frac{nx}{2} + \alpha\,\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,\cos\frac{x}{2} = 0.$$

Separamos los términos rápidos de los términos lentos:

$$\tan\frac{nx}{2} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\tan\frac{x}{2}.$$

$$nx = j\pi - 2\arctan\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\tan\frac{x}{2}\right), \qquad j \text{ par}.$$

$$nx = (j-1)\pi + 2\arctan\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\cot\frac{x}{2}\right).$$

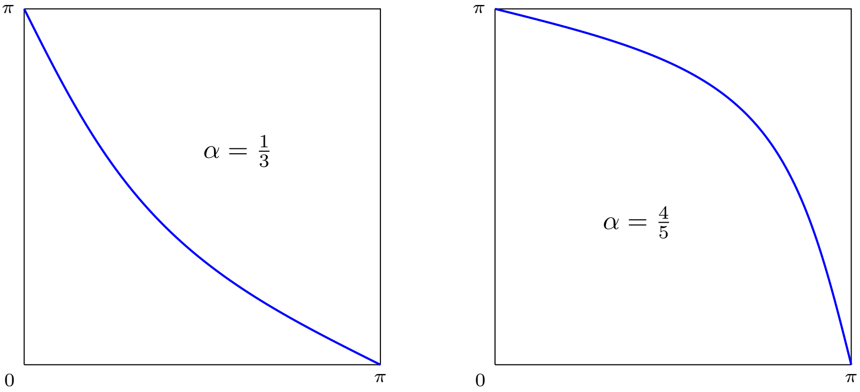
Ecuación principal

$$\boxed{x = d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(x)}{n},}$$

donde

$$d_{n,j} := \frac{(j-1)\pi}{n}, \qquad \eta_\alpha(x) := 2\arctan\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\cot\frac{x}{2}\right).$$

Función η_α



Solución numérica con el método del punto fijo

$$x = \underbrace{d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(x)}{n}}_{f_{n,j}},$$

$$K(\alpha) := \|\eta'_\alpha\|_\infty = \max\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}, \frac{1-\alpha}{\alpha}\right).$$

$$f'_{n,j}(x) = \frac{\eta'_\alpha(x)}{n}, \qquad \|f'_{n,j}\|_\infty = \frac{K(\alpha)}{n}.$$

Proposición

Para $n > K(\alpha)$, la función $f_{n,\alpha}$ es una contracción.

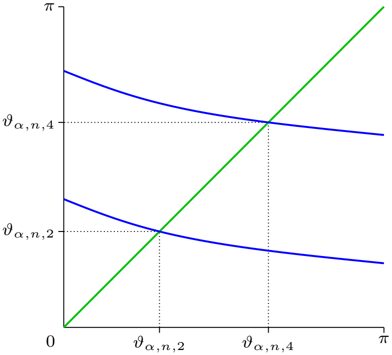
Teorema (ecuación principal)

Sea j par, $1 \leq j \leq n$. Entonces, $\lambda_{n,j} = g(\vartheta_{n,j})$,
donde $\vartheta_{n,j}$ es la única solución de la siguiente ecuación:

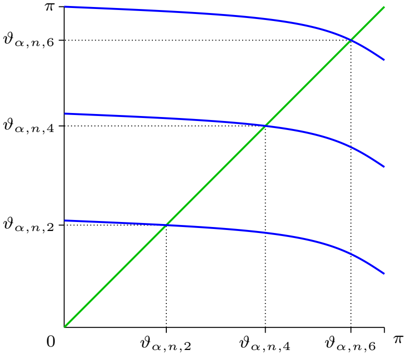
$$x = d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(x)}{n} \qquad (0 \leq x \leq \pi).$$

Ecuación principal

$$x = d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(x)}{n}.$$



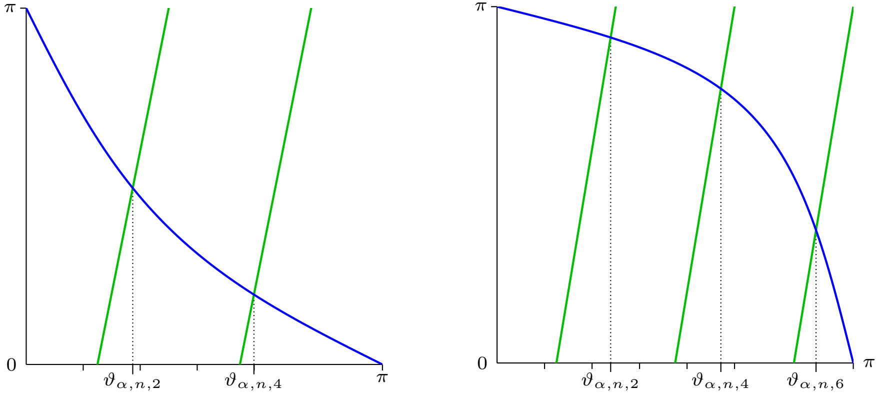
$\alpha = \frac{1}{3}$, $n = 5$, $j = 2, 4$.



$\alpha = \frac{4}{5}$, $n = 6$, $j = 2, 4, 6$.

Otra forma de la ecuación principal

$$nx - (j-1)\pi = \eta_\alpha(x).$$



Solución numérica con el método de Newton

Teorema

Sea j par, $2 \leq j \leq n$. Entonces, la ecuación

$$nx - (j-1)\pi - \eta_\alpha(x) = 0$$

se puede resolver con el método de Newton:

$$y_0 := \frac{(j-1)\pi}{n}, \qquad y_q := y_{q-1} - \frac{n y_{q-1} - (j-1)\pi - \eta_\alpha(y_{q-1})}{n - \eta'_\alpha(y_{q-1})},$$

$$\vartheta_{n,j} = \lim_{q\to\infty} y_q.$$

Localización de los valores propios

$$d_{n,j} = \frac{(j-1)\pi}{n}, \qquad \forall x \in (0,\pi) \quad 0 < \eta_\alpha(x) < \pi.$$

La solución de la ecuación $x = d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(x)}{n}$ satisface

$$d_{n,j} < \vartheta_{n,j} < d_{n,j+1}.$$

Teorema

Para cada j impar,

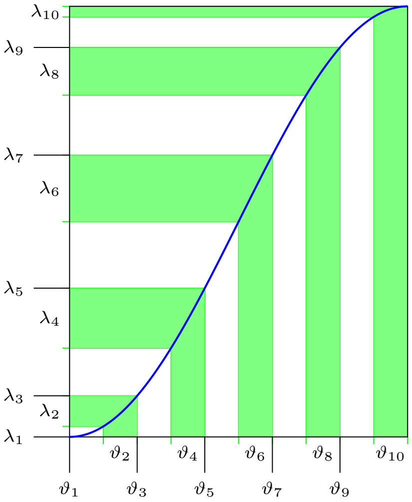
$$\lambda_{n,j} = g(d_{n,j}).$$

Para cada j par,

$$g(d_{n,j}) < \lambda_{n,j} < g(d_{n,j+1}).$$

Por consecuencia, los valores propios son simples: $\lambda_{n,1} < \ldots < \lambda_{n,n}$.

Localización de los valores propios



Distribución asintótica

Corolario

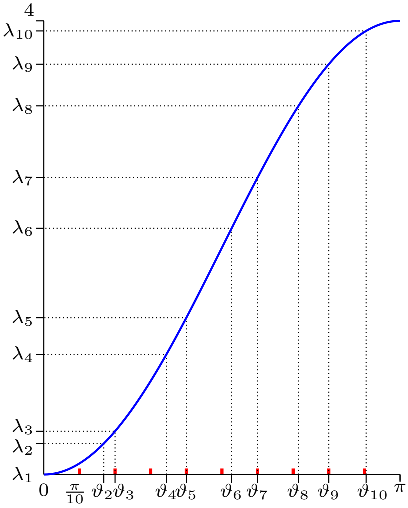
Para cada u en $[0,4]$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\left\{1 \le j \le n:\ \lambda_{n,j} \le u\right\}}{n} = \frac{1}{\pi} g^{-1}(u) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\sqrt{u}}{2}.$$

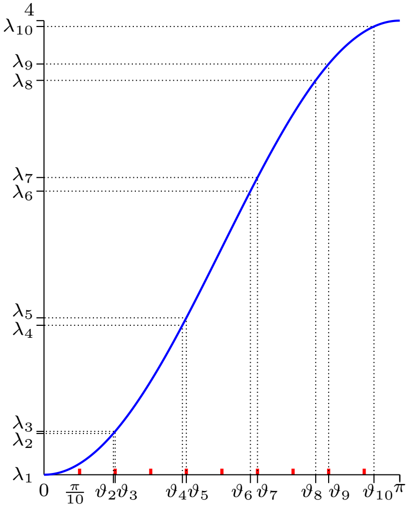
Resultados más generales:

Garoni, C.; Serra-Capizzano, S. (2016):
Generalized Locally Toeplitz Sequences: Theory and Applications, vol. I.

Ejemplo: $\alpha = 1/3$, $n = 10$



Ejemplo: $\alpha = 4/5$, $n = 6$



Plan

1. Introducción
2. Análisis de la ecuación característica
3. Expansión asintótica
4. Vectores propios
5. Otros valores de α

Idea: iterar en la ecuación principal usando la expansión de Taylor

$$\vartheta_{n,j} = d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(\vartheta_{n,j})}{n}$$

Idea: iterar en la ecuación principal usando la expansión de Taylor

$$\vartheta_{n,j} = d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(\vartheta_{n,j})}{n} \qquad \Longrightarrow$$

Idea: iterar en la ecuación principal usando la expansión de Taylor

$$\vartheta_{n,j} = d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(\vartheta_{n,j})}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad \vartheta_{n,j} = d_{n,j} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Idea: iterar en la ecuación principal usando la expansión de Taylor

$$\vartheta_{n,j} = d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(\vartheta_{n,j})}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad \vartheta_{n,j} = d_{n,j} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\vartheta_{n,j} = d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha\left(d_{n,j} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n}$$

Idea: iterar en la ecuación principal usando la expansión de Taylor

$$\vartheta_{n,j} = d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(\vartheta_{n,j})}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad \vartheta_{n,j} = d_{n,j} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\vartheta_{n,j} = d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha\left(d_{n,j} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n}$$

$$=$$

Idea: iterar en la ecuación principal usando la expansión de Taylor

$$\vartheta_{n,j} = d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(\vartheta_{n,j})}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad \vartheta_{n,j} = d_{n,j} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{n,j} &= d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha\left(d_{n,j} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n} \\ &= d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(d_{n,j}) + \eta_\alpha'(\xi)\, O\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \end{aligned}$$

Idea: iterar en la ecuación principal usando la expansión de Taylor

$$\vartheta_{n,j} = d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(\vartheta_{n,j})}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad \vartheta_{n,j} = d_{n,j} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_{n,j} &= d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha\left(d_{n,j} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n} \\
&= d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(d_{n,j}) + \eta'_\alpha(\xi)\, O\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \\
&=
\end{aligned}$$

Idea: iterar en la ecuación principal usando la expansión de Taylor

$$\vartheta_{n,j} = d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(\vartheta_{n,j})}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad \vartheta_{n,j} = d_{n,j} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_{n,j} &= d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha\left(d_{n,j} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n} \\
&= d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(d_{n,j}) + \eta'_\alpha(\xi)\, O\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \\
&= d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(d_{n,j})}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Continuación: seguimos iterando

$$\vartheta_{n,j} = d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(\vartheta_{n,j})}{n}.$$

$$\vartheta_{n,j} = d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha\left(d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(d_{n,j})}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{n}$$

Continuación: seguimos iterando

$$\vartheta_{n,j} = d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(\vartheta_{n,j})}{n}.$$

$$\vartheta_{n,j} = d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha\left(d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(d_{n,j})}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{n}$$

$$=$$

Continuación: seguimos iterando

$$\vartheta_{n,j} = d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(\vartheta_{n,j})}{n}.$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_{n,j} &= d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha \left(d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(d_{n,j})}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{n} \\
&= d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(d_{n,j}) + \eta'_\alpha(d_{n,j})\left(\frac{\eta_\alpha(d_{n,j})}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \eta''_\alpha(\xi)\left(\frac{\eta_\alpha(d_{n,j})}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2}{n}
\end{aligned}$$

Continuación: seguimos iterando

$$\vartheta_{n,j} = d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(\vartheta_{n,j})}{n}.$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_{n,j} &= d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha\left(d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(d_{n,j})}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{n} \\
&= d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(d_{n,j}) + \eta_\alpha'(d_{n,j})\left(\frac{\eta_\alpha(d_{n,j})}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \eta_\alpha''(\xi)\left(\frac{\eta_\alpha(d_{n,j})}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2}{n} \\
&=
\end{aligned}$$

Continuación: seguimos iterando

$$\vartheta_{n,j} = d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(\vartheta_{n,j})}{n}.$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_{n,j} &= d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha\left(d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(d_{n,j})}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{n} \\
&= d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(d_{n,j}) + \eta_\alpha'(d_{n,j})\left(\frac{\eta_\alpha(d_{n,j})}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \eta_\alpha''(\xi)\left(\frac{\eta_\alpha(d_{n,j})}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2}{n} \\
&= d_{n,j} + \frac{\eta_\alpha(d_{n,j})}{n} + \frac{\eta_\alpha(d_{n,j})\eta_\alpha'(d_{n,j})}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).
\end{aligned}$$

El truco de Münchhausen

Los razonamientos anteriores me recuerdan un cuento.

Expansión asintótica de $\lambda_{n,j}$

Hemos obtenido

$$\vartheta_{n,j} = \frac{\eta_\alpha(d_{n,j})}{n} + \frac{\eta_\alpha(d_{n,j})\eta'_\alpha(d_{n,j})}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Recordamos que $\lambda_{n,j} = g(\vartheta_{n,j})$.

Teorema

Cuando $n \to \infty$, $2 \le j \le n$, j es par,

$$\lambda_{n,j} = g(d_{n,j}) + \frac{g'(d_{n,j})\eta_\alpha(d_{n,j})}{n} + \frac{g'(d_{n,j})\eta_\alpha(d_{n,j})\eta'_\alpha(d_{n,j}) + \frac{1}{2}g''(d_{n,j})\eta_\alpha(d_{n,j})^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Experimentos numéricos

$$E_n := \max_{1\le j\le n} |\lambda_{n,j} - \lambda_{n,j}^{\text{asympt}}|.$$

$\alpha = 1/3$		
n	E_n	$n^3 E_n$
256	2.28×10^{-6}	38.24
512	2.90×10^{-7}	38.86
1024	3.65×10^{-8}	39.17
2048	4.58×10^{-9}	39.32
4096	5.73×10^{-10}	39.40
8192	7.17×10^{-11}	39.44

$\alpha = 4/5$		
n	E_n	$n^3 E_n$
256	6.90×10^{-7}	11.58
512	8.66×10^{-8}	11.62
1024	1.08×10^{-8}	11.63
2048	1.36×10^{-9}	11.64
4096	1.69×10^{-10}	11.64
8192	2.12×10^{-11}	11.64

Plan

1 Introducción

2 Análisis de la ecuación característica

3 Expansión asintótica

4 Vectores propios

5 Otros valores de α

Vectores propios

Para $j = 1$,

$$v_{n,1} = \left[1, \ldots, 1\right]^{\top}.$$

Teorema

Para $2 \leq j \leq n$,

$$v_{n,j} = \Big[\sin(k\vartheta_{n,j}) - (1-\alpha)\sin((k-1)\vartheta_{n,j}) + \alpha\sin((n-k)\vartheta_{n,j})\Big]_{k=1}^{n}.$$

Se puede escribir como

$$v_{n,j} = \Big[A_{\alpha,n,j}\sin\big(k\vartheta_{n,j} + B_{\alpha,n,j}\big)\Big]_{k=1}^{n}.$$

- Fernandes, R.; Da Fonseca, C.M. (2009):
  The inverse eigenvalue problem for Hermitian matrices whose graphs are cycles.
- Yueh, W.C.; Cheng, S.S. (2008):
  Explicit eigenvalues and inverses of tridiagonal Toeplitz matrices with four perturbed corners.
- Bogoya, J.M.; Böttcher, A.; Grudsky, S.M.; Maximenko, E.A. (2015):
  Eigenvalues of Hermitian Toeplitz matrices with smooth simple-loop symbols.
- Grudsky, S.M.; Maximenko, E.A.; Soto-González, A. (2022):
  Eigenvalues of the laplacian matrices of the cycles with one weighted edge.
  Linear Algebra Appl., https://doi.org/10.1016/j.laa.2022.07.011

Página interactiva:

https://www.egormaximenko.com/plots/laplacian_of_cycle_eig.html

Plan

1 Introducción

2 Análisis de la ecuación característica

3 Expansión asintótica

4 Vectores propios

5 Otros valores de α

Arista sobrepesada, $\alpha > 1$

El valor propio máximo sale del intervalo $[0, 4]$,

$$\lambda_{n,n} = 4 + 4\sinh^2\frac{\vartheta_{n,n}}{2},$$

y converge rápidamente a un límite que depende de α:

$$\lambda_{n,n} = \Omega_\alpha + O\left(\frac{1}{(1+2\alpha)^n}\right), \qquad \Omega_\alpha := \frac{4\alpha^2}{2\alpha - 1} > 4.$$

Las componentes del vector propio se escriben en términos del seno hiperbólico:

$$v_{n,n} = \Big[\sinh(k\vartheta_{n,n}) - (1-\alpha)\sinh((k-1)\vartheta_{n,n}) + \alpha\sinh((n-k)\vartheta_{n,n})\Big]_{k=1}^{n}.$$

Arista con un peso negativo, $\alpha < 0$

El valor propio mínimo sale del intervalo $[0, 4]$

$$\lambda_{n,1} = -4\sinh^2 \frac{\vartheta_{n,n}}{2},$$

y converge rápidamente a un límite que depende de α:

$$\lambda_{n,1} = \Omega_\alpha + O\left(\frac{1}{(1+2|\alpha|)^n}\right), \qquad \Omega_\alpha := \frac{4\alpha^2}{2\alpha - 1} < 0.$$

$$v_{n,1} = \Big[\sinh(k\vartheta_{n,1}) - (1-\alpha)\sinh((k-1)\vartheta_{n,1}) + \alpha\sinh((n-k)\vartheta_{n,1})\Big]_{k=1}^{n}.$$

Arista con peso complejo, $\alpha \in \mathbb{C}$

$$D_{\alpha,n}(\lambda) = (\lambda - 2\operatorname{Re}(\alpha))U_{n-1}\left(\frac{\lambda-2}{2}\right) - 2\operatorname{Re}(\alpha)U_{n-2}\left(\frac{\lambda-2}{2}\right) + 2(-1)^{n+1}\operatorname{Re}(\alpha).$$

Los valores propios de la matriz $L_{\alpha,n}$ son los mismos que de la matriz $L_{\operatorname{Re}(\alpha),n}$:

$$\lambda_{\alpha,n,j} = \lambda_{\operatorname{Re}(\alpha),n,j}.$$

Sin embargo, los vectores propios son diferentes.