

# La transformada de Fourier del núcleo reproductor y los operadores invariantes bajo traslaciones

Egor Maximenko,  
trabajo conjunto con  
Crispin Herrera Yañez y Gerardo Ramos Vazquez

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

55 Congreso Nacional de la SMM, Universidad de Guadalajara  
Octubre de 2022

1 Objetos de estudio y herramientas

2 Resultados

3 Ejemplos

# Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Sea  $D$  un conjunto.  $\mathbb{C}^D :=$  el espacio vectorial de las funciones  $D \rightarrow \mathbb{C}$ .

## Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Sea  $D$  un conjunto.  $\mathbb{C}^D :=$  el espacio vectorial de las funciones  $D \rightarrow \mathbb{C}$ .

Sea  $H$  un subespacio vectorial de  $\mathbb{C}^D$  y al mismo tiempo un espacio de Hilbert.

## Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Sea  $D$  un conjunto.  $\mathbb{C}^D :=$  el espacio vectorial de las funciones  $D \rightarrow \mathbb{C}$ .

Sea  $H$  un subespacio vectorial de  $\mathbb{C}^D$  y al mismo tiempo un espacio de Hilbert.

Sea  $(K_z)_{z \in D}$  una familia de funciones, tal que  $K_z \in H$  para cada  $z$ .

# Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Sea  $D$  un conjunto.  $\mathbb{C}^D :=$  el espacio vectorial de las funciones  $D \rightarrow \mathbb{C}$ .

Sea  $H$  un subespacio vectorial de  $\mathbb{C}^D$  y al mismo tiempo un espacio de Hilbert.

Sea  $(K_z)_{z \in D}$  una familia de funciones, tal que  $K_z \in H$  para cada  $z$ .

Decimos que  $(K_z)_{z \in D}$  es un **núcleo reproductor** de  $H$  si

$$\forall f \in H \quad \forall z \in D \quad f(z) = \langle f, K_z \rangle.$$

# Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Sea  $D$  un conjunto.  $\mathbb{C}^D :=$  el espacio vectorial de las funciones  $D \rightarrow \mathbb{C}$ .

Sea  $H$  un subespacio vectorial de  $\mathbb{C}^D$  y al mismo tiempo un espacio de Hilbert.

Sea  $(K_z)_{z \in D}$  una familia de funciones, tal que  $K_z \in H$  para cada  $z$ .

Decimos que  $(K_z)_{z \in D}$  es un **núcleo reproductor** de  $H$  si

$$\forall f \in H \quad \forall z \in D \quad f(z) = \langle f, K_z \rangle.$$

Un par de propiedades:

$$\langle K_z, K_w \rangle = K_z(w), \quad K_z(w) = \overline{K_w(z)}.$$

# Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

Sea  $D$  un conjunto.  $\mathbb{C}^D :=$  el espacio vectorial de las funciones  $D \rightarrow \mathbb{C}$ .

Sea  $H$  un subespacio vectorial de  $\mathbb{C}^D$  y al mismo tiempo un espacio de Hilbert.

Sea  $(K_z)_{z \in D}$  una familia de funciones, tal que  $K_z \in H$  para cada  $z$ .

Decimos que  $(K_z)_{z \in D}$  es un **núcleo reproductor** de  $H$  si

$$\forall f \in H \quad \forall z \in D \quad f(z) = \langle f, K_z \rangle.$$

Un par de propiedades:

$$\langle K_z, K_w \rangle = K_z(w), \quad K_z(w) = \overline{K_w(z)}.$$

El conjunto  $\{K_z : z \in D\}$  es total en  $H$ :  $\text{clos}(\text{lin}(\{K_z : z \in D\})) = H$ .



# Grupos abelianos localmente compactos

Cada GALC tiene una **medida de Haar**  $\nu$ , invariante bajo traslaciones y regular.

## Grupos abelianos localmente compactos

Cada GALC tiene una **medida de Haar**  $\nu$ , invariante bajo traslaciones y regular.

Sea  $\widehat{G}$  el grupo dual de  $G$  y sea  $\widehat{\nu}$  la medida de Haar correspondiente.

## Grupos abelianos localmente compactos

Cada GALC tiene una **medida de Haar**  $\nu$ , invariante bajo traslaciones y regular.

Sea  $\widehat{G}$  el grupo dual de  $G$  y sea  $\widehat{\nu}$  la medida de Haar correspondiente.

Ejemplos:

# Grupos abelianos localmente compactos

Cada GALC tiene una **medida de Haar**  $\nu$ , invariante bajo traslaciones y regular.

Sea  $\widehat{G}$  el grupo dual de  $G$  y sea  $\widehat{\nu}$  la medida de Haar correspondiente.

Ejemplos:

- $G = \mathbb{R}^n$ ,  $\widehat{G} \cong \mathbb{R}^n$ ,  $\nu = \widehat{\nu} =$  la medida de Lebesgue  $\mu_n$ ,

caracteres  $e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle}$ ,  $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ .

# Grupos abelianos localmente compactos

Cada GALC tiene una **medida de Haar**  $\nu$ , invariante bajo traslaciones y regular.

Sea  $\widehat{G}$  el grupo dual de  $G$  y sea  $\widehat{\nu}$  la medida de Haar correspondiente.

Ejemplos:

- $G = \mathbb{R}^n$ ,  $\widehat{G} \cong \mathbb{R}^n$ ,  $\nu = \widehat{\nu} =$  la medida de Lebesgue  $\mu_n$ ,

$$\text{caracteres } e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle}, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

- $\mathbb{T} = \{\tau \in \mathbb{C} : |\tau| = 1\} \cong \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ , con la longitud del arco normalizada  $\nu$ .  
 $\widehat{G} \cong \mathbb{Z}$ ,  $\widehat{\nu}$  es la medida de conteo,

$$\text{caracteres } t^k, \quad t \in \mathbb{T}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

# Dominios tipo tubo y EHNR invariantes bajo traslaciones horizontales

Nosotros suponemos que  $D = G \times Y$ ,  
 $G$  es un GALC con medida de Haar  $\nu$ ,  $(Y, \lambda)$  es un espacio de medida.

## Dominios tipo tubo y EHNR invariantes bajo traslaciones horizontales

Nosotros suponemos que  $D = G \times Y$ ,

$G$  es un GALC con medida de Haar  $\nu$ ,  $(Y, \lambda)$  es un espacio de medida.

Suponemos que  $H$  es un EHNR, encajado en  $L^2(G \times Y, \nu \times \lambda)$ .

# Dominios tipo tubo y EHNR invariantes bajo traslaciones horizontales

Nosotros suponemos que  $D = G \times Y$ ,

$G$  es un GALC con medida de Haar  $\nu$ ,  $(Y, \lambda)$  es un espacio de medida.

Suponemos que  $H$  es un EHNR, encajado en  $L^2(G \times Y, \nu \times \lambda)$ .

Para cada  $a$  en  $G$ , definimos  $\rho(a): H \rightarrow H$ ,

$$(\rho(a)f)(u, v) := f(u - a, v).$$



# Dominios tipo tubo y EHNR invariantes bajo traslaciones horizontales

Nosotros suponemos que  $D = G \times Y$ ,  
 $G$  es un GALC con medida de Haar  $\nu$ ,  $(Y, \lambda)$  es un espacio de medida.

Suponemos que  $H$  es un EHNR, encajado en  $L^2(G \times Y, \nu \times \lambda)$ .

Para cada  $a$  en  $G$ , definimos  $\rho(a): H \rightarrow H$ ,

$$(\rho(a)f)(u, v) := f(u - a, v).$$

Suponemos que  $\rho(a)f \in H$  para cada  $f$  en  $H$ .

# Dominios tipo tubo y EHNR invariantes bajo traslaciones horizontales

Nosotros suponemos que  $D = G \times Y$ ,  
 $G$  es un GALC con medida de Haar  $\nu$ ,  $(Y, \lambda)$  es un espacio de medida.

Suponemos que  $H$  es un EHNR, encajado en  $L^2(G \times Y, \nu \times \lambda)$ .

Para cada  $a$  en  $G$ , definimos  $\rho(a): H \rightarrow H$ ,

$$(\rho(a)f)(u, v) := f(u - a, v).$$

Suponemos que  $\rho(a)f \in H$  para cada  $f$  en  $H$ .

De manera equivalente,  $K$  satisface

$$K_{x+a,y}(u + a, v) = K_{x,y}(u, v), \quad K_{x,y}(u, v) = K_{0,y}(u - x, v).$$

## Ejemplo 1: el espacio de Bergman sobre el semiplano superior

$$\Pi := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}, \quad H = L^2_{\text{hol}}(\Pi).$$

# Ejemplo 1: el espacio de Bergman sobre el semiplano superior

$$\Pi := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}, \quad H = L^2_{\text{hol}}(\Pi).$$

$$K_z(w) = \frac{1}{\pi(w - \bar{z})^2}.$$

# Ejemplo 1: el espacio de Bergman sobre el semiplano superior

$$\Pi := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}, \quad H = L^2_{\text{hol}}(\Pi).$$

$$K_z(w) = \frac{1}{\pi(w - \bar{z})^2}.$$

$G = \mathbb{R}$ ,  $Y = \mathbb{R}_+$ , identificamos  $\Pi$  con  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ :

$$K_{x,y}(u,v) = \frac{1}{\pi(u - x + i(v + y))^2}.$$

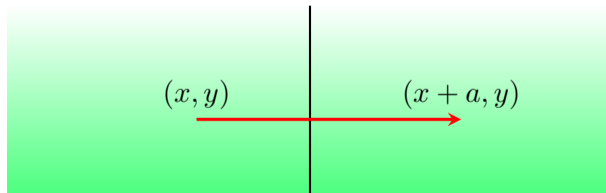
## Ejemplo 1: el espacio de Bergman sobre el semiplano superior

$$\Pi := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}, \quad H = L^2_{\text{hol}}(\Pi).$$

$$K_z(w) = \frac{1}{\pi(w - \bar{z})^2}.$$

$G = \mathbb{R}$ ,  $Y = \mathbb{R}_+$ , identificamos  $\Pi$  con  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ :

$$K_{x,y}(u,v) = \frac{1}{\pi(u - x + i(v + y))^2}.$$



## Ejemplo 2: el espacio de Steinwart–Hush–Scovel

$\mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$  consiste de las funciones analíticas en  $\mathbb{C}^n$  tales que

$$\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 \exp\left(-4\alpha^2 \sum_{j=1}^n \operatorname{Im}(z_j)^2\right) d\mu_{2n}(z) < +\infty.$$

## Ejemplo 2: el espacio de Steinwart–Hush–Scovel

$\mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$  consiste de las funciones analíticas en  $\mathbb{C}^n$  tales que

$$\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 \exp\left(-4\alpha^2 \sum_{j=1}^n \operatorname{Im}(z_j)^2\right) d\mu_{2n}(z) < +\infty.$$

El núcleo reproductor de  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$  es el núcleo de Gauss complejo:

$$K_z(w) = \exp\left(-\alpha^2 \sum_{j=1}^n (w_j - \bar{z}_j)^2\right) \quad (z, w \in \mathbb{C}^n).$$



## Ejemplo 2: el espacio de Steinwart–Hush–Scovel

$\mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$  consiste de las funciones analíticas en  $\mathbb{C}^n$  tales que

$$\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 \exp\left(-4\alpha^2 \sum_{j=1}^n \operatorname{Im}(z_j)^2\right) d\mu_{2n}(z) < +\infty.$$

El núcleo reproductor de  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$  es el núcleo de Gauss complejo:

$$K_z(w) = \exp\left(-\alpha^2 \sum_{j=1}^n (w_j - \bar{z}_j)^2\right) \quad (z, w \in \mathbb{C}^n).$$

Su restricción al dominio  $\mathbb{R}^n$  se usa en el aprendizaje automático.

## Ejemplo 2: el espacio de Steinwart–Hush–Scovel

$\mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$  consiste de las funciones analíticas en  $\mathbb{C}^n$  tales que

$$\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 \exp\left(-4\alpha^2 \sum_{j=1}^n \operatorname{Im}(z_j)^2\right) d\mu_{2n}(z) < +\infty.$$

El núcleo reproductor de  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$  es el núcleo de Gauss complejo:

$$K_z(w) = \exp\left(-\alpha^2 \sum_{j=1}^n (w_j - \bar{z}_j)^2\right) \quad (z, w \in \mathbb{C}^n).$$

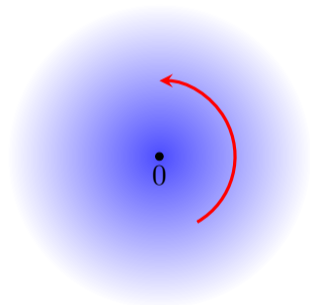
Su restricción al dominio  $\mathbb{R}^n$  se usa en el aprendizaje automático.

Identificamos  $\mathbb{C}^n$  con  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

$$K_{x,y}(u, v) = \exp\left(-\alpha^2 \sum_{j=1}^n ((u_j - x_j + i(v_j + y_j))^2)\right).$$

# Ejemplo 3: el espacio de Bargman–Segal–Fock

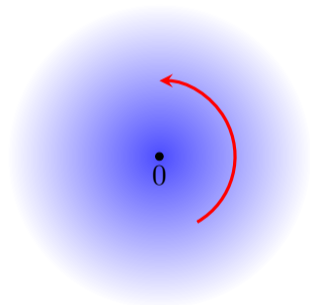
$$\mathcal{F}(\mathbb{C}) := L^2_{\text{hol}}(\mathbb{C}, e^{-|z|^2} d\mu_2(z)).$$



$$K_z(w) = e^{\bar{z}w}$$

# Ejemplo 3: el espacio de Bargman–Segal–Fock

$$\mathcal{F}(\mathbb{C}) := L^2_{\text{hol}}(\mathbb{C}, e^{-|z|^2} d\mu_2(z)).$$

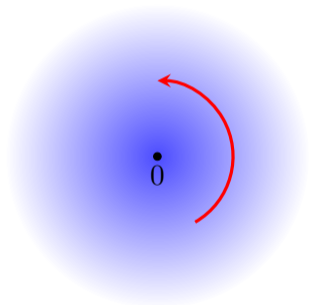


$$\begin{array}{c} z = y e^{ix} \\ \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} \\ w = v e^{iu} \end{array}$$

$$K_z(w) = e^{\bar{z}w}$$

# Ejemplo 3: el espacio de Bargman–Segal–Fock

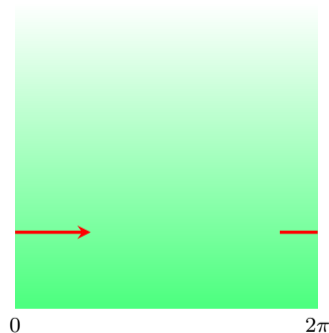
$$\mathcal{F}(\mathbb{C}) := L^2_{\text{hol}}(\mathbb{C}, e^{-|z|^2} d\mu_2(z)).$$



$$K_z(w) = e^{\bar{z}w}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{z = y e^{ix}} \\ w = v e^{iu} \end{array}$$

$$[0, 2\pi) \times \mathbb{R}_+$$



$$K_{x,y}(u, v) = yv e^{yv} e^{i(u-x)}$$

# La representación unitaria $\rho$ y su centralizador

Para cada  $a$  en  $G$ ,  $\rho(a): H \rightarrow H$ ,

$$(\rho(a)f)(x, y) := f(x - a, y).$$

# La representación unitaria $\rho$ y su centralizador

Para cada  $a$  en  $G$ ,  $\rho(a): H \rightarrow H$ ,

$$(\rho(a)f)(x, y) := f(x - a, y).$$

Es fácil ver que  $\rho$  es una representación unitaria:

$$\|\rho(a)f\| = \|f\|, \quad \rho(a + b) = \rho(a)\rho(b).$$

# La representación unitaria $\rho$ y su centralizador

Para cada  $a$  en  $G$ ,  $\rho(a): H \rightarrow H$ ,

$$(\rho(a)f)(x, y) := f(x - a, y).$$

Es fácil ver que  $\rho$  es una representación unitaria:

$$\|\rho(a)f\| = \|f\|, \quad \rho(a + b) = \rho(a)\rho(b).$$

Nuestro objetivo es estudiar los operadores invariantes bajo  $\rho$ :

$$\mathcal{V} := \left\{ S \in \mathcal{B}(H) : \forall a \in G \quad S\rho(a) = \rho(a)S \right\}.$$

$\mathcal{V}$  es un álgebra de von Neumann (en otras palabras, álgebra  $W^*$ ).



# Antecedentes: más de 25 ejemplos de clases de operadores invariantes

- Vasilevski, Grudsky, Karapetyants:  
operadores verticales, radiales, angulares en  $L^2_{\text{hol}}(\Pi)$  y  $L^2_{\text{hol}}(\mathbb{D})$ ,
- Quiroga-Barranco y Vasilevski:  
varias clases de operadores invariantes en  $L^2_{\text{hol}}(\mathbb{B}_n)$ .
- Loaiza-Leyva, Lozano-Arizmendi:  
operadores verticales, radiales, angulares en  $L^2_{\text{arm}}(\Pi)$  y  $L^2_{\text{arm}}(\mathbb{D})$ .
- Hutník, Hutníková, Mišková:  
operadores horizontales en espacios de ondículas.
- Sánchez-Nungaray, Ramírez-Ortega, Ramírez-Mora, Morales-García, etc.:  
operadores horizontales y angulares en  $L^2_{m\text{-hol}}(\Pi)$ .
- Dawson, Ólafsson, Quiroga-Barranco: espacios de Bergman sobre dominios multidimensionales.

# Transformada de Fourier–Plancherel

$$F: L^2(G, \nu) \rightarrow L^2(\widehat{G}, \widehat{\nu}).$$

# Transformada de Fourier–Plancherel

$$F: L^2(G, \nu) \rightarrow L^2(\widehat{G}, \widehat{\nu}).$$

Para cada  $f$  en  $L^1(G) \cap L^2(G)$ ,

$$(Ff)(\xi) := \int_G \overline{\xi(x)} f(x) \, d\nu(x) \quad (\xi \in \widehat{G}).$$

# Transformada de Fourier–Plancherel

$$F: L^2(G, \nu) \rightarrow L^2(\widehat{G}, \widehat{\nu}).$$

Para cada  $f$  en  $L^1(G) \cap L^2(G)$ ,

$$(Ff)(\xi) := \int_G \overline{\xi(x)} f(x) \, d\nu(x) \quad (\xi \in \widehat{G}).$$

Por ejemplo, si  $G = \mathbb{R}^n$ , entonces  $\widehat{G} \cong \mathbb{R}^n$ ,

$$(Ff)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} f(x) \, d\mu_n(x) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

1 Objetos de estudio y herramientas

2 Resultados

3 Ejemplos

# La proyección sobre $H$ parece convolución

Sea  $P \in \mathcal{B}(L^2(G \times Y))$  la proyección ortogonal sobre  $H$ :

$$(Pf)(x, y) = \langle f, K_{x,y} \rangle.$$

# La proyección sobre $H$ parece convolución

Sea  $P \in \mathcal{B}(L^2(G \times Y))$  la proyección ortogonal sobre  $H$ :

$$(Pf)(x, y) = \langle f, K_{x,y} \rangle.$$

$$\begin{aligned}(Pf)(x, y) &= \int_G \int_Y f(u, v) \overline{K_{x,y}(u, v)} \, d\nu(u) d\lambda(v) \\ &= \int_G \int_Y f(u, v) K_{0,v}(x - u, y) \, d\nu(u) d\lambda(v).\end{aligned}$$

# La proyección sobre $H$ parece convolución

Sea  $P \in \mathcal{B}(L^2(G \times Y))$  la proyección ortogonal sobre  $H$ :

$$(Pf)(x, y) = \langle f, K_{x,y} \rangle.$$

$$\begin{aligned}(Pf)(x, y) &= \int_G \int_Y f(u, v) \overline{K_{x,y}(u, v)} \, d\nu(u) d\lambda(v) \\ &= \int_G \int_Y f(u, v) K_{0,v}(x - u, y) \, d\nu(u) d\lambda(v).\end{aligned}$$

Tenemos una convolución sobre la primera coordenada.



## Transformada de Fourier respecto a la primera coordenada

$$F \otimes I: L^2(G \times Y) \rightarrow L^2(\widehat{G} \times Y),$$

esto es,

$$((F \otimes I)f)(\xi, y) := \int_G f(x, y) \overline{\xi(x)} \, d\nu(x) \quad (\xi \in \widehat{G}, y \in Y).$$

## Transformada de Fourier respecto a la primera coordenada

$$F \otimes I: L^2(G \times Y) \rightarrow L^2(\widehat{G} \times Y),$$

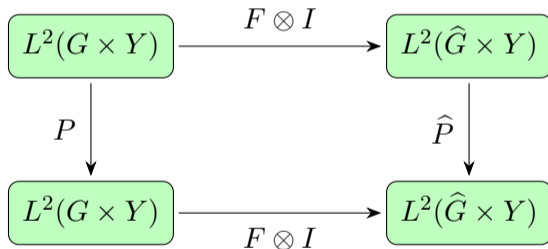
esto es,

$$((F \otimes I)f)(\xi, y) := \int_G f(x, y) \overline{\xi(x)} \, d\nu(x) \quad (\xi \in \widehat{G}, y \in Y).$$

$$L_{\xi, y}(v) := \int_G \overline{\xi(u)} K_{0, y}(u, v) \, d\nu(u).$$

# La proyección $P$ en las imágenes de Fourier

Pongamos  $\hat{P} := (F \otimes I)P(F \otimes I)^*$ .



# La proyección $P$ en las imágenes de Fourier

$$(Pf)(x, y) = \int_G \int_Y f(u, v) K_{0,v}(x - u, y) d\nu(u) d\lambda(v).$$

## Proposición

*Bajo ciertas condiciones adicionales sobre  $K$  y  $L$ ,*

$$(\hat{P}g)(\xi, y) = \int_Y g(\xi, v) \overline{L_{\xi,y}(v)} d\lambda(v).$$

# Asociamos un EHNR (una “fibra”) a cada frecuencia

Para cada  $\xi$  en  $\widehat{G}$ , definimos  $\widehat{H}_\xi \leq L^2(Y)$ ,

$$\widehat{H}_\xi := \text{clos}(\text{lin}(\{L_{\xi,y} : y \in Y\})).$$

# Asociamos un EHNR (una “fibra”) a cada frecuencia

Para cada  $\xi$  en  $\widehat{G}$ , definimos  $\widehat{H}_\xi \leq L^2(Y)$ ,

$$\widehat{H}_\xi := \text{clos}(\text{lin}(\{L_{\xi,y} : y \in Y\})).$$

## Proposición

$\widehat{H}_\xi$  es un EHNR con núcleo  $(L_{\xi,y})_{y \in Y}$ .

La proyección ortogonal sobre  $\widehat{H}_\xi$  está dada por

$$(\widehat{P}_\xi h)(y) := \langle h, L_{\xi,y} \rangle = \int_Y h(v) \overline{L_{\xi,y}(v)} \, d\lambda(v).$$

# Descomposición de $\widehat{H}$ en fibras

Nos restringimos a las frecuencias no triviales:

$$\Omega := \{\xi \in \widehat{G} : \dim(\widehat{H}_\xi) > 0\}.$$

# Descomposición de $\widehat{H}$ en fibras

Nos restringimos a las frecuencias no triviales:

$$\Omega := \{\xi \in \widehat{G} : \dim(\widehat{H}_\xi) > 0\}.$$

$$\widehat{H} := (F \otimes I)(H).$$

## Proposición

$$\widehat{H} = \int_{\Omega}^{\oplus} \widehat{H}_\xi \, d\widehat{\nu}(\xi).$$



## Descomposición del álgebra $\mathcal{V}$

Definimos  $\Phi: H \rightarrow \hat{H}$  como  $F \otimes I$  comprimida al dominio  $H$  y codominio  $\hat{H}$ .

# Descomposición del álgebra $\mathcal{V}$

Definimos  $\Phi: H \rightarrow \hat{H}$  como  $F \otimes I$  comprimida al dominio  $H$  y codominio  $\hat{H}$ .

## Teorema 1

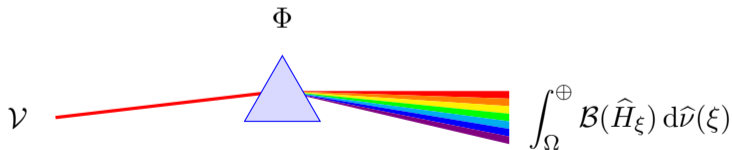
$$\mathcal{V} \cong \Phi \mathcal{V} \Phi^* = \int_{\Omega}^{\oplus} \mathcal{B}(\hat{H}_{\xi}) d\hat{\nu}(\xi).$$

# Descomposición del álgebra $\mathcal{V}$

Definimos  $\Phi: H \rightarrow \hat{H}$  como  $F \otimes I$  comprimida al dominio  $H$  y codominio  $\hat{H}$ .

## Teorema 1

$$\mathcal{V} \cong \Phi \mathcal{V} \Phi^* = \int_{\Omega}^{\oplus} \mathcal{B}(\hat{H}_{\xi}) d\hat{\nu}(\xi).$$



## Criterio de conmutatividad de $\mathcal{V}$

### Teorema 2

*Las siguientes condiciones son equivalentes:*

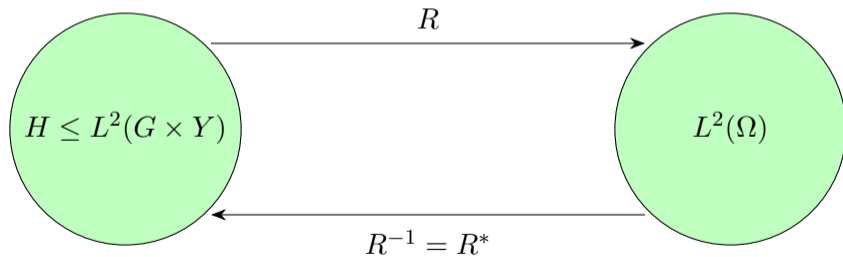
- $\mathcal{V}$  es conmutativa;
- $\forall \xi \in \Omega \quad \dim(\widehat{H}_\xi) = 1$ ;
- $\forall \xi \in \Omega \quad \forall y, v \in Y \quad |L_{\xi,y}(v)|^2 = L_{\xi,y}(y)L_{\xi,v}(v)$ ;
- *existe una función medible  $q: \Omega \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  tal que*

$$L_{\xi,y}(v) = \overline{q_\xi(y)}q_\xi(v).$$

Isomorfismo isométrico  $R: H \rightarrow L^2(\Omega)$  en el caso conmutativo

Tenemos una familia  $(q_\xi)_{\xi \in \Omega}$  tal que  $\widehat{H}_\xi = \mathbb{C}q_\xi$  y  $\|q_\xi\| = 1$  para cada  $\xi$ .

$$(Rf)(\xi) := \langle (\Phi f)(\xi, \cdot), q_\xi \rangle_{L^2(Y)}.$$

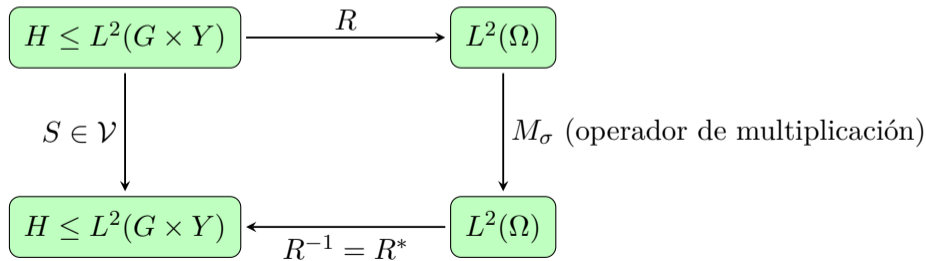


Diagonalización de  $\mathcal{V}$  en el caso conmutativo

## Teorema 3

Supongamos que  $\dim(\widehat{H}_\xi) = 1$  para cada  $\xi$  en  $\Omega$ . Entonces

$$\mathcal{V} \cong L^\infty(\Omega).$$



1 Objetos de estudio y herramientas

2 Resultados

3 Ejemplos

Ejemplo 1: operadores verticales en  $L^2_{\text{hol}}(\Pi)$ 

$H :=$  el espacio de Bergman sobre  $\Pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ .

$$K_{x,y}(u,v) = -\frac{1}{\pi(u-x+i(v+y))^2}.$$



Ejemplo 1: operadores verticales en  $L_{\text{hol}}^2(\Pi)$ 

$H :=$  el espacio de Bergman sobre  $\Pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ .

$$K_{x,y}(u, v) = -\frac{1}{\pi (u - x + i(v + y))^2}.$$

$$L_{\xi,y}(v) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i u \xi} du}{\pi (u + i(v + y))^2} = \begin{cases} 4\pi \xi e^{-2\pi \xi (y+v)}, & \xi > 0; \\ 0, & \xi \leq 0. \end{cases}$$

Ejemplo 1: operadores verticales en  $L_{\text{hol}}^2(\Pi)$ 

$H :=$  el espacio de Bergman sobre  $\Pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ .

$$K_{x,y}(u, v) = -\frac{1}{\pi (u - x + i(v + y))^2}.$$

$$L_{\xi,y}(v) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i u \xi} du}{\pi (u + i(v + y))^2} = \begin{cases} 4\pi \xi e^{-2\pi \xi (y+v)}, & \xi > 0; \\ 0, & \xi \leq 0. \end{cases}$$

Notamos que  $L_{\xi,y}(v)$ , con  $\xi > 0$ , se puede factorizar:

$$L_{\xi,y}(v) = \left(2\sqrt{\pi\xi} e^{-2\pi\xi y}\right) \left(2\sqrt{\pi\xi} e^{-2\pi\xi v}\right), \quad q_{\xi}(v) = 2\sqrt{\pi\xi} e^{-2\pi\xi v}.$$

Conclusión: en este ejemplo  $\Omega = \mathbb{R}_+$ ,  $\mathcal{V}$  es conmutativa,  $\mathcal{V} \cong L^{\infty}(\Omega)$ .

Ejemplo 2: operadores horizontales en el espacio de Steinwart  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$ 

$$K_{x,y}(u, v) = \exp \left( -\alpha^2 \sum_{j=1}^n ((u_j - x_j + i(v_j + y_j))^2) \right).$$

Ejemplo 2: operadores horizontales en el espacio de Steinwart  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$ 

$$K_{x,y}(u, v) = \exp \left( -\alpha^2 \sum_{j=1}^n ((u_j - x_j + i(v_j + y_j))^2) \right).$$

El cálculo de  $L_{\xi,y}(v)$  se reduce a la integral de Gauss–Poisson.

Ejemplo 2: operadores horizontales en el espacio de Steinwart  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$ 

$$K_{x,y}(u, v) = \exp \left( -\alpha^2 \sum_{j=1}^n ((u_j - x_j + i(v_j + y_j))^2) \right).$$

El cálculo de  $L_{\xi,y}(v)$  se reduce a la integral de Gauss–Poisson.

Resulta que  $L_{\xi,y} = \overline{q_{\xi}(y)} q_{\xi}(v)$ , con

$$q_{\xi}(v) = \left( \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \right)^{n/2} \exp \left( - \sum_{j=1}^n \left( 2\pi v_j \xi_j + \frac{\pi^2 \xi_j^2}{2\alpha^2} \right) \right).$$

Ejemplo 2: operadores horizontales en el espacio de Steinwart  $\mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$ 

$$K_{x,y}(u, v) = \exp \left( -\alpha^2 \sum_{j=1}^n ((u_j - x_j + i(v_j + y_j))^2) \right).$$

El cálculo de  $L_{\xi,y}(v)$  se reduce a la integral de Gauss–Poisson.

Resulta que  $L_{\xi,y} = \overline{q_{\xi}(y)} q_{\xi}(v)$ , con

$$q_{\xi}(v) = \left( \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \right)^{n/2} \exp \left( - \sum_{j=1}^n \left( 2\pi v_j \xi_j + \frac{\pi^2 \xi_j^2}{2\alpha^2} \right) \right).$$

Luego  $\Omega = \mathbb{R}^n$  y  $\mathcal{V}$  es conmutativa.

## Ejemplo 3: operadores radiales en el espacio de Fock $\mathcal{F}(\mathbb{C})$

Después de pasar a las coordenadas polares,

$$K_{x,y}(u, v) = yv \exp\left(yv e^{i(u-x)}\right).$$

## Ejemplo 3: operadores radiales en el espacio de Fock $\mathcal{F}(\mathbb{C})$

Después de pasar a las coordenadas polares,

$$K_{x,y}(u, v) = yv \exp\left(yv e^{i(u-x)}\right).$$

Expandimos  $K_{0,y}(u, v)$  en una serie de Fourier:

$$K_{0,y}(u, v) = \sum_{\xi=0}^{\infty} \frac{(yv)^{\xi+1}}{\xi!} e^{i\xi u}.$$



## Ejemplo 3: operadores radiales en el espacio de Fock $\mathcal{F}(\mathbb{C})$

Después de pasar a las coordenadas polares,

$$K_{x,y}(u, v) = yv \exp\left(yv e^{i(u-x)}\right).$$

Expandimos  $K_{0,y}(u, v)$  en una serie de Fourier:

$$K_{0,y}(u, v) = \sum_{\xi=0}^{\infty} \frac{(yv)^{\xi+1}}{\xi!} e^{i\xi u}.$$

Entonces  $L_{\xi,y}(v)$  es el  $\xi$ -ésimo coeficiente de Fourier:

$$L_{\xi,y}(v) = \frac{(yv)^{\xi+1}}{\xi!} = \frac{y^{\xi+1}}{\sqrt{\xi!}} \frac{v^{\xi+1}}{\sqrt{\xi!}} = \overline{q_{\xi}(y)} q_{\xi}(v), \quad q_{\xi}(v) = \frac{v^{\xi+1}}{\sqrt{\xi!}}.$$

## Ejemplo 3: operadores radiales en el espacio de Fock $\mathcal{F}(\mathbb{C})$

Después de pasar a las coordenadas polares,

$$K_{x,y}(u, v) = yv \exp\left(yv e^{i(u-x)}\right).$$

Expandimos  $K_{0,y}(u, v)$  en una serie de Fourier:

$$K_{0,y}(u, v) = \sum_{\xi=0}^{\infty} \frac{(yv)^{\xi+1}}{\xi!} e^{i\xi u}.$$

Entonces  $L_{\xi,y}(v)$  es el  $\xi$ -ésimo coeficiente de Fourier:

$$L_{\xi,y}(v) = \frac{(yv)^{\xi+1}}{\xi!} = \frac{y^{\xi+1}}{\sqrt{\xi!}} \frac{v^{\xi+1}}{\sqrt{\xi!}} = \overline{q_{\xi}(y)} q_{\xi}(v), \quad q_{\xi}(v) = \frac{v^{\xi+1}}{\sqrt{\xi!}}.$$

Conclusión:  $\Omega = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathcal{V}$  es conmutativa,  $\mathcal{V} \cong \ell^{\infty}(\mathbb{N}_0)$ .

## Conclusión

Proponemos un esquema para estudiar operadores invariantes bajo traslaciones en EHNR sobre dominios de la forma  $G \times Y$ .

# Conclusión

Proponemos un esquema para estudiar operadores invariantes bajo traslaciones en EHNR sobre dominios de la forma  $G \times Y$ .

En cada ejemplo, al calcular la integral de Fourier del núcleo reproductor,

$$\int_G \overline{\xi(u)} K_{0,y}(u, v) d\nu(u),$$

podemos describir el álgebra  $\mathcal{V}$  de los operadores invariantes.

# Conclusión

Proponemos un esquema para estudiar operadores invariantes bajo traslaciones en EHNR sobre dominios de la forma  $G \times Y$ .

En cada ejemplo, al calcular la integral de Fourier del núcleo reproductor,

$$\int_G \overline{\xi(u)} K_{0,y}(u, v) d\nu(u),$$

podemos describir el álgebra  $\mathcal{V}$  de los operadores invariantes.

Hemos aplicado este esquema a 15 ejemplos (incluso 2 ejemplos nuevos), seguimos trabajando.

# Conclusión

Proponemos un esquema para estudiar operadores invariantes bajo traslaciones en EHNR sobre dominios de la forma  $G \times Y$ .

En cada ejemplo, al calcular la integral de Fourier del núcleo reproductor,

$$\int_G \overline{\xi(u)} K_{0,y}(u, v) d\nu(u),$$

podemos describir el álgebra  $\mathcal{V}$  de los operadores invariantes.

Hemos aplicado este esquema a 15 ejemplos (incluso 2 ejemplos nuevos), seguimos trabajando.

¡Gracias por su atención!