Análisis del caso nilpotente en el espacio de Bergman sobre el dominio de Siegel por medio de la transformada de Fourier del núcleo reproductor

Egor Maximenko,

trabajo conjunto con Alejandro Hernández Arteaga

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

Seminario “Teoría de operadores de Toeplitz”, CINVESTAV del IPN
21 de septiembre de 2022

1. Objetos de estudio
2. Esquema para dominios $G \times Y$
3. Cambio de variable
4. Transformada de Fourier del núcleo

Plan

1. Objetos de estudio
2. Esquema para dominios $G \times Y$
3. Cambio de variable
4. Transformada de Fourier del núcleo

Raul Quiroga-Barranco, Nikolai Vasilevski (2007):
Commutative C*-algebras of Toeplitz operators on the unit ball, I. Bargmann-type transforms and spectral representations of Toeplitz operators.
Integral Equ. Oper. Theory. DOI: 10.1007/s00020-007-1537-6.

Raul Quiroga-Barranco, Nikolai Vasilevski (2007):
Commutative C*-algebras of Toeplitz operators on the unit ball, I. Bargmann-type transforms and spectral representations of Toeplitz operators.
Integral Equ. Oper. Theory. DOI: 10.1007/s00020-007-1537-6.

Quiroga-Barranco y Vasilevski trabajaron en los espacios $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}_n)$ y $\mathcal{A}^2(D_n)$ y diagonalizaron los operadores de Toeplitz con símbolos generadores invariantes bajo la acción de varios subgrupos abelianos maximales del grupo de Möbius.

Raul Quiroga-Barranco, Nikolai Vasilevski (2007):
Commutative C*-algebras of Toeplitz operators on the unit ball, I.
Bargmann-type transforms and spectral representations of Toeplitz operators.
Integral Equ. Oper. Theory. DOI: 10.1007/s00020-007-1537-6.

Quiroga-Barranco y Vasilevski trabajaron en los espacios $\mathcal{A}^2(\mathbb{B}_n)$ y $\mathcal{A}^2(D_n)$ y diagonalizaron los operadores de Toeplitz con símbolos generadores invariantes bajo la acción de varios subgrupos abelianos maximales del grupo de Möbius.

En esta plática trabajamos con uno de estos casos, el “caso nilpotente”, y obtenemos resultados similares con otro método.

Espacio de Bergmann sobre el dominio de Siegel D_n

$$D_n := \{z \in \mathbb{C}^n \colon \ \mathrm{Im}(z_n) - |z'|^2 > 0\}.$$

Espacio de Bergmann sobre el dominio de Siegel D_n

$$D_n := \{z \in \mathbb{C}^n \colon\ \mathrm{Im}(z_n) - |z'|^2 > 0\}.$$

D_n se considera con la siguiente medida ($\alpha > -1$):

$$\mathrm{d}\widetilde{\mu}_{n,\alpha}(z) := p_{n,\alpha}(z)\,\mathrm{d}\mu_{2n}(z), \qquad p_{n,\alpha}(z) := \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{4\pi^n\Gamma(\alpha+1)}\,(\mathrm{Im}(z_n) - |z'|^2)^\alpha.$$

Espacio de Bergmann sobre el dominio de Siegel D_n

$$D_n := \{z \in \mathbb{C}^n \colon \ \mathrm{Im}(z_n) - |z'|^2 > 0\}.$$

D_n se considera con la siguiente medida ($\alpha > -1$):

$$\mathrm{d}\widetilde{\mu}_{n,\alpha}(z) := p_{n,\alpha}(z)\,\mathrm{d}\mu_{2n}(z), \qquad p_{n,\alpha}(z) := \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{4\pi^n\Gamma(\alpha+1)}\,(\mathrm{Im}(z_n) - |z'|^2)^\alpha.$$

Usamos la notación

$$z' = (z_1, \ldots, z_{n-1}).$$

Espacio de Bergmann sobre el dominio de Siegel D_n

$$D_n := \{z \in \mathbb{C}^n : \ \mathrm{Im}(z_n) - |z'|^2 > 0\}.$$

D_n se considera con la siguiente medida ($\alpha > -1$):

$$\mathrm{d}\widetilde{\mu}_{n,\alpha}(z) := p_{n,\alpha}(z)\,\mathrm{d}\mu_{2n}(z), \qquad p_{n,\alpha}(z) := \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{4\pi^n\Gamma(\alpha+1)}\,(\mathrm{Im}(z_n) - |z'|^2)^\alpha.$$

Usamos la notación

$$z' = (z_1, \ldots, z_{n-1}).$$

$\mathcal{A}^2 := \mathcal{A}^2(D_n, \widetilde{\mu}_{n,\alpha}) :=$ las funciones analíticas en D_n de clase $L^2(D_n, \widetilde{\mu}_{n,\alpha})$.

El núcleo reproductor de $\mathcal{A}^2$

$\mathcal{A}^2$ es un EHNR (espacio de Hilbert con núcleo reproductor). Su núcleo es

$$K_z^{\mathcal{A}^2}(w) = K^{\mathcal{A}^2}(w,z) = \frac{1}{\left(\frac{w_n - \overline{z}_n}{2\,\mathrm{i}} - \langle w', z' \rangle\right)^{n+\alpha+1}},$$

donde

$$\langle w', z' \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} w_k \overline{z_k}.$$

Una manera de calcular $K^{\mathcal{A}^2}$:
usar el núcleo reproductor en la bola $\mathbb{B}_n$ y aplicar la transformada de Cayley.

Acción del subgrupo nilpotente del grupo de Möbius

Este subgrupo es isomorfo a $\mathbb{R}^n$ por medio de la siguiente acción fiel:

$$\tau_{\mathrm{nil}} \colon \mathbb{R}^n \to \mathrm{Möb}(D_n),$$

$$\boxed{\tau_{\mathrm{nil}}(g)(z) := \left(z' + g', z_n + g_n + 2\,\mathrm{i}\,\langle z', g'\rangle + \mathrm{i}\,|g'|^2\right).}$$

Acción del subgrupo nilpotente del grupo de Möbius

Este subgrupo es isomorfo a $\mathbb{R}^n$ por medio de la siguiente acción fiel:

$$\tau_{\mathrm{nil}} \colon \mathbb{R}^n \to \mathrm{Möb}(D_n),$$

$$\tau_{\mathrm{nil}}(g)(z) := (z' + g', z_n + g_n + 2\,\mathrm{i}\,\langle z', g' \rangle + \mathrm{i}\,|g'|^2).$$

La expresión $\mathrm{Im}(z_n) - |z'|^2$ es invariante bajo τ_{nil}.

Acción del subgrupo nilpotente del grupo de Möbius

Este subgrupo es isomorfo a $\mathbb{R}^n$ por medio de la siguiente acción fiel:

$$\tau_{\text{nil}} \colon \mathbb{R}^n \to \text{Möb}(D_n),$$

$$\tau_{\text{nil}}(g)(z) := \left(z' + g', z_n + g_n + 2\,\mathrm{i}\,\langle z', g'\rangle + \mathrm{i}\,|g'|^2\right).$$

La expresión $\text{Im}(z_n) - |z'|^2$ es invariante bajo τ_{nil}. Si $w = \tau_{\text{nil}}(g)(z)$, entonces

$$\text{Im}(w_n) - |w'|^2 = \text{Im}(z_n) + 2\,\langle \text{Re}(z'), g'\rangle + |g'|^2 - |z' + g'|^2 = \text{Im}(z_n) - |z'|^2.$$

Acción del subgrupo nilpotente del grupo de Möbius

Este subgrupo es isomorfo a $\mathbb{R}^n$ por medio de la siguiente acción fiel:

$$\tau_{\mathrm{nil}} \colon \mathbb{R}^n \to \mathrm{Möb}(D_n),$$

$$\boxed{\tau_{\mathrm{nil}}(g)(z) := (z' + g', z_n + g_n + 2\,\mathrm{i}\,\langle z', g' \rangle + \mathrm{i}\,|g'|^2).}$$

La expresión $\mathrm{Im}(z_n) - |z'|^2$ es invariante bajo τ_{nil}. Si $w = \tau_{\mathrm{nil}}(g)(z)$, entonces

$$\mathrm{Im}(w_n) - |w'|^2 = \mathrm{Im}(z_n) + 2\,\langle \mathrm{Re}(z'), g' \rangle + |g'|^2 - |z' + g'|^2 = \mathrm{Im}(z_n) - |z'|^2.$$

Más aún, el jacobiano real de $\tau_{\mathrm{nil}}(g)$ es 1.

Representación unitaria del grupo nilpotente en $\mathcal{A}^2$ y su centralizador

$\rho_{\text{nil}} \colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{U}(\mathcal{A}^2)$,

$$(\rho_{\text{nil}}(g)f)(z) = f(\tau_{\text{nil}}(-g)(z)).$$

Representación unitaria del grupo nilpotente en $\mathcal{A}^2$ y su centralizador

$\rho_{\mathrm{nil}} \colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{U}(\mathcal{A}^2)$,

$$(\rho_{\mathrm{nil}}(g)f)(z) = f(\tau_{\mathrm{nil}}(-g)(z)).$$

El núcleo $K^{\mathcal{A}^2}$ es invariante bajo ρ_{nil}:

$$K^{\mathcal{A}^2}_{\tau_{\mathrm{nil}}(b)(z)}(\tau_{\mathrm{nil}}(b)(w)) = K^{\mathcal{A}^2}_z(w).$$

Representación unitaria del grupo nilpotente en $\mathcal{A}^2$ y su centralizador

$\rho_{\mathrm{nil}} \colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{U}(\mathcal{A}^2)$,

$$(\rho_{\mathrm{nil}}(g) f)(z) = f(\tau_{\mathrm{nil}}(-g)(z)).$$

El núcleo $K^{\mathcal{A}^2}$ es invariante bajo ρ_{nil}:

$$K^{\mathcal{A}^2}_{\tau_{\mathrm{nil}}(b)(z)}(\tau_{\mathrm{nil}}(b)(w)) = K^{\mathcal{A}^2}_{z}(w).$$

El objeto principal del estudio:

$$\mathcal{C}(\rho_{\mathrm{nil}}) := \Big\{ S \in \mathcal{B}(\mathcal{A}^2) \colon \quad \forall g \in \mathbb{R}^n \quad S\,\rho_{\mathrm{nil}}(g) = \rho_{\mathrm{nil}}(g)\,S \Big\}.$$

Análisis del caso nilpotente en el artículo de Quiroga Barranco y Vasilevski

1. "Aplastaron" el dominio de Siegel: $D_n \to \mathbb{R}^{2n-1} \times \mathbb{R}_+$.
2. Transformaron las ecuaciones diferenciales de Cauchy–Riemann–Wirtinger.
3. Aplicaron la transformada de Fourier a las ecuaciones diferenciales.
4. Hicieron varios cambios de variables, resolvieron las ecuaciones diferenciales y construyeron un isomorfismo isométrico $R_{\text{nil}} \colon \mathcal{A}^2 \to L^2(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+)$.
5. Mostraron que si $b \in L^\infty(D_n)$ es invariante bajo τ_{nil}, entonces $R_{\text{nil}}\, T_b\, R_{\text{nil}}^*$ es un operador de multiplicación.

Plan

Esquema para dominios $G \times Y$

Crispin Herrera-Yañez, Egor A. Maximenko, Gerardo Ramos-Vazquez (2022):
Translation-invariant operators in reproducing kernel Hilbert spaces.
Integral Equ. Oper. Theory. DOI: 10.1007/s00020-022-02705-4.

Grupos abelianos localmente compactos

Sea G un GALC.

Grupos abelianos localmente compactos

Sea G un GALC.

G tiene una medida de Haar ν, invariante bajo traslaciones y regular.

Grupos abelianos localmente compactos

Sea G un GALC.

G tiene una medida de Haar ν, invariante bajo traslaciones y regular.

Sea $\widehat{G}$ el grupo dual de G y sea $\widehat{\nu}$ la medida de Haar correspondiente.

Grupos abelianos localmente compactos

Sea G un GALC.

G tiene una medida de Haar ν, invariante bajo traslaciones y regular.

Sea $\widehat{G}$ el grupo dual de G y sea $\widehat{\nu}$ la medida de Haar correspondiente.

En esta plática

$$G = \mathbb{R}^n, \quad \widehat{G} \cong \mathbb{R}^n, \quad \nu = \widehat{\nu} = \text{la medida de Lebesgue } \mu_n,$$

$$\text{caracteres} \quad \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\langle x,\xi\rangle}, \qquad x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Transformada de Fourier–Plancherel

$$F \colon L^2(G,\nu) \to L^2(\widehat{G},\widehat{\nu}).$$

Transformada de Fourier–Plancherel

$F\colon L^2(G,\nu) \to L^2(\widehat{G},\widehat{\nu})$.

Para cada f en $L^1(G) \cap L^2(G)$,

$$(Ff)(\xi) := \int_G \overline{\xi(x)}\, f(x)\, \mathrm{d}\nu(x) \qquad (\xi \in \widehat{G}).$$

Transformada de Fourier–Plancherel

$F\colon L^2(G,\nu) \to L^2(\widehat{G},\widehat{\nu})$.

Para cada f en $L^1(G) \cap L^2(G)$,

$$(Ff)(\xi) := \int_G \overline{\xi(x)}\, f(x)\, \mathrm{d}\nu(x) \qquad (\xi \in \widehat{G}).$$

Por ejemplo, si $G = \mathbb{R}^n$, entonces $\widehat{G} \cong \mathbb{R}^n$,

$$(Ff)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\langle x,\xi\rangle}\, f(x)\, \mathrm{d}\mu_n(x) \qquad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

Las notaciones y suposiciones del esquema

- El dominio es de la forma $G \times Y$.
- G es un grupo abeliano localmente compacto, metrizable, σ-compacto.
- ν es una medida de Haar en G.
- Y es un espacio de medida σ-finita λ.
- $G \times Y$ se considera con la medida producto $\nu \times \lambda$.
- $L^2(G \times Y)$ es separable.
- $H \leq L^2(G \times Y)$, H es un EHNR.
- Denotamos el NR de H por $(K_{x,y})_{x \in G,\ y \in Y}$.

Las notaciones y suposiciones del esquema

- H es invariante bajo las traslaciones horizontales. De manera equivalente,

$$\forall x, u \in G \qquad \forall y, v \in Y \qquad K_{x,y}(u, v) = K_{0,y}(u - x, v).$$

- Acción de G en $G \times Y$: $\tau_{G\times Y}(g)\colon\ (x, y) \mapsto (x + g, y)$.

- Representación unitaria de G en H:

$$(\rho_H(g)f)(x, y) := f(x - g, y).$$

- $\forall y \in Y \quad \sup\limits_{v\in Y} \displaystyle\int_G |K_{(0,y)}(u, v)|\,\mathrm{d}\nu(u) < +\infty.$

La proyección sobre H parece convolución

Sea $P \in \mathcal{B}(L^2(G \times Y))$ la proyección ortogonal cuya imagen es H:

$$(Pf)(x, y) = \langle f, K_{x,y} \rangle.$$

La proyección sobre H parece convolución

Sea $P \in \mathcal{B}(L^2(G \times Y))$ la proyección ortogonal cuya imagen es H:

$$(Pf)(x,y) = \langle f, K_{x,y} \rangle.$$

$$\begin{aligned}(Pf)(x,y) &= \int_G \int_Y f(u,v)\overline{K_{x,y}(u,v)}\,\mathrm{d}\nu(u)\mathrm{d}\lambda(v)\\ &= \int_G \int_Y f(u,v)K_{0,v}(x-u,y)\,\mathrm{d}\nu(u)\mathrm{d}\lambda(v).\end{aligned}$$

La proyección sobre H parece convolución

Sea $P \in \mathcal{B}(L^2(G \times Y))$ la proyección ortogonal cuya imagen es H:

$$(Pf)(x,y) = \langle f, K_{x,y} \rangle.$$

$$\begin{aligned}(Pf)(x,y) &= \int_G \int_Y f(u,v)\overline{K_{x,y}(u,v)}\,\mathrm{d}\nu(u)\mathrm{d}\lambda(v) \\ &= \int_G \int_Y f(u,v) K_{0,v}(x-u,y)\,\mathrm{d}\nu(u)\mathrm{d}\lambda(v).\end{aligned}$$

Tenemos una convolución sobre la primera coordenada.

Transformación de Fourier–Plancherel respecto la primer componente

$F \otimes I$ es un isomorfismo isométrico $L^2(G \times Y) \to L^2(\widehat{G} \times Y)$.

Transformación de Fourier–Plancherel respecto la primer componente

$F \otimes I$ es un isomorfismo isométrico $L^2(G \times Y) \to L^2(\widehat{G} \times Y)$.

Para $f \in L^1(G \times Y) \cap L^2(G \times Y)$,

$$((F \otimes I)f)(\xi, v) = \int_G \overline{\xi(u)}\, f(u,v)\, \mathrm{d}\nu(u) \qquad \forall f \in L^1(G \times Y) \cap L^2(G \times Y).$$

Transformación de Fourier–Plancherel respecto la primer componente

$F \otimes I$ es un isomorfismo isométrico $L^2(G \times Y) \to L^2(\widehat{G} \times Y)$.

Para $f \in L^1(G \times Y) \cap L^2(G \times Y)$,

$$((F \otimes I)f)(\xi, v) = \int_G \overline{\xi(u)}\, f(u,v)\,\mathrm{d}\nu(u) \qquad \forall f \in L^1(G \times Y) \cap L^2(G \times Y).$$

Pongamos $\widehat{H} \coloneqq (F \otimes I)(H)$.

Transformación de Fourier–Plancherel respecto la primer componente

$F \otimes I$ es un isomorfismo isométrico $L^2(G \times Y) \to L^2(\widehat{G} \times Y)$.

Para $f \in L^1(G \times Y) \cap L^2(G \times Y)$,

$$((F \otimes I)f)(\xi, v) = \int_G \overline{\xi(u)}\, f(u, v)\, \mathrm{d}\nu(u) \qquad \forall f \in L^1(G \times Y) \cap L^2(G \times Y).$$

Pongamos $\widehat{H} := (F \otimes I)(H)$.

Sea $\Phi\colon H \to \widehat{H}$ la compresión de $F \otimes I$.

Proyección sobre $\widehat{H}$

$$L_{\xi,y}(v) := \int_G K_{(0,y)}(u,v)\,\overline{\xi(u)}\,\mathrm{d}\nu(u).$$

Proyección sobre $\widehat{H}$

$$L_{\xi,y}(v) := \int_G K_{(0,y)}(u,v)\,\overline{\xi(u)}\,\mathrm{d}\nu(u).$$

$$\widehat{P} := (F \otimes I)\,P\,(F \otimes I)^*.$$

Proyección sobre $\widehat{H}$

$$L_{\xi,y}(v) := \int_G K_{(0,y)}(u,v)\,\overline{\xi(u)}\,\mathrm{d}\nu(u).$$

$$\widehat{P} := (F \otimes I)\,P\,(F \otimes I)^*.$$

Proposición

$$(\widehat{P}g)(\xi,y) = \int_Y g(\xi,v)\overline{L_{\xi,y}(v)}\,\mathrm{d}\lambda(v).$$

Proyección sobre $\widehat{H}$

$$L_{\xi,y}(v) := \int_G K_{(0,y)}(u,v)\,\overline{\xi(u)}\,\mathrm{d}\nu(u).$$

$$\widehat{P} := (F \otimes I)\,P\,(F \otimes I)^*.$$

Proposición

$$(\widehat{P}g)(\xi,y) = \int_Y g(\xi,v)\overline{L_{\xi,y}(v)}\,\mathrm{d}\lambda(v).$$

Idea de demostración: el teorema de convolución + Fubini.

Las “fibras” asociadas a diferentes frecuencias

$$L_{\xi,y}(v) := \int_G K_{(0,y)}(u,v)\,\overline{\xi(u)}\,\mathrm{d}\nu(u).$$

Las "fibras" asociadas a diferentes frecuencias

$$L_{\xi,y}(v) := \int_G K_{(0,y)}(u,v)\,\overline{\xi(u)}\,\mathrm{d}\nu(u).$$

$$\widehat{H}_\xi := \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{L_{\xi,v}\colon\ v \in Y\})).$$

Las "fibras" asociadas a diferentes frecuencias

$$L_{\xi,y}(v) := \int_G K_{(0,y)}(u,v)\,\overline{\xi(u)}\,\mathrm{d}\nu(u).$$

$$\widehat{H}_\xi := \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{L_{\xi,v}\colon\ v \in Y\})).$$

$$\Omega := \{\xi \in \widehat{G}\colon\ \dim(\widehat{H}_\xi) > 0\}.$$

Las "fibras" asociadas a diferentes frecuencias

$$L_{\xi,y}(v) := \int_G K_{(0,y)}(u,v)\,\overline{\xi(u)}\,\mathrm{d}\nu(u).$$

$$\widehat{H}_\xi := \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{L_{\xi,v}\colon\ v \in Y\})).$$

$$\Omega := \{\xi \in \widehat{G}\colon\ \dim(\widehat{H}_\xi) > 0\}.$$

Proposición

Para cada ξ en Ω, la familia $(L_{\xi,y})_{y \in Y}$ es el núcleo reproductor de $\widehat{H}_\xi$.

Las "fibras" asociadas a diferentes frecuencias

$$L_{\xi,y}(v) := \int_G K_{(0,y)}(u,v)\,\overline{\xi(u)}\,\mathrm{d}\nu(u).$$

$$\widehat{H}_\xi := \operatorname{clos}(\operatorname{lin}(\{L_{\xi,v}\colon\ v \in Y\})).$$

$$\Omega := \{\xi \in \widehat{G}\colon\ \dim(\widehat{H}_\xi) > 0\}.$$

Proposición

Para cada ξ en Ω, la familia $(L_{\xi,y})_{y\in Y}$ es el núcleo reproductor de $\widehat{H}_\xi$.

Idea de demostración: la proposición sobre $\widehat{P}$ + Moore–Aronszajn.

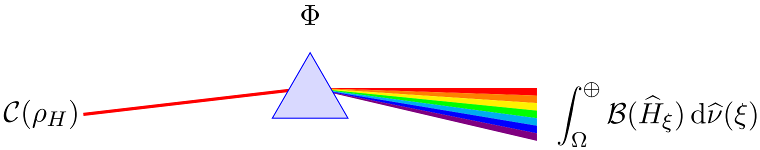
Descomposición del álgebra $\mathcal{C}(\rho_H)$

Proposición

$$\widehat{H} = \int_\Omega^\oplus \widehat{H}_\xi \, \mathrm{d}\widehat{\nu}(\xi).$$

Proposición

$$\Phi\, \mathcal{C}(\rho_H)\, \Phi^* = \int_\Omega^\oplus \mathcal{B}(\widehat{H}_\xi)\, \mathrm{d}\widehat{\nu}(\xi).$$



Criterio de conmutatividad de $\mathcal{C}(\rho_H)$

Proposición

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\mathcal{C}(\rho_H)$ es conmutativa;

(b) $\forall \xi \in \Omega \qquad \dim(\widehat{H}_\xi) = 1$;

(c) $\forall \xi \in \Omega \quad \forall y, v \in Y \qquad |L_{\xi,y}(v)|^2 = L_{\xi,y}(y) L_{\xi,v}(v)$;

(d) existe una función medible $q\colon \Omega \times Y \to \mathbb{C}$ tal que

$$L_{\xi,y}(v) = \overline{q_\xi(y)} q_\xi(v).$$

Isomorfismo isométrico $R\colon H \to L^2(\Omega)$ en el caso conmutativo

Tenemos una familia $(q_\xi)_{\xi\in\Omega}$ tal que $\widehat{H}_\xi = \mathbb{C}q_\xi$ y $\|q_\xi\| = 1$ para cada ξ.

$$(Rf)(\xi) \coloneqq \langle (\Phi f)(\xi,\cdot), q_\xi \rangle_{L^2(Y)}.$$

$$\begin{tikzcd} H \leq L^2(G \times Y) \arrow[r, shift left, "R"] & L^2(\Omega) \arrow[l, shift left, "R^{-1} = R^*"] \end{tikzcd}$$

Diagonalización de $\mathcal{C}(\rho_H)$ en el caso conmutativo

Proposición

Supongamos que $\dim(\widehat{H}_\xi) = 1$ para cada ξ en Ω. Entonces $\mathcal{C}(\rho_H) \cong L^\infty(\Omega)$.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{H \leq L^2(G \times Y)} \arrow[r, "R"] \arrow[d, "S \in \mathcal{C}(\rho_H)"'] & \boxed{L^2(\Omega)} \arrow[d, "M_\sigma \text{ (operador de multiplicación)}"] \\
\boxed{H \leq L^2(G \times Y)} & \boxed{L^2(\Omega)} \arrow[l, "R^{-1} = R^*"]
\end{tikzcd}$$

Operadores de Toeplitz con símbolos "verticales"

Sea $a \in L^\infty(Y)$. Definimos

$$\widetilde{a} \in L^\infty(G \times Y), \qquad \widetilde{a}(u,v) := a(v).$$

Operadores de Toeplitz con símbolos "verticales"

Sea $a \in L^\infty(Y)$. Definimos

$$\widetilde{a} \in L^\infty(G \times Y), \qquad \widetilde{a}(u,v) \coloneqq a(v).$$

Sea $T_{\widetilde{a}}$ el operador de Toeplitz que actúa en H: $\quad T_{\widetilde{a}} f \coloneqq P(\widetilde{a}\, f)$.

Operadores de Toeplitz con símbolos “verticales”

Sea $a \in L^\infty(Y)$. Definimos

$$\widetilde{a} \in L^\infty(G \times Y), \qquad \widetilde{a}(u,v) := a(v).$$

Sea $T_{\widetilde{a}}$ el operador de Toeplitz que actúa en H: $\quad T_{\widetilde{a}} f := P(\widetilde{a}\, f)$.

Proposición

Sea $a \in L^\infty(Y)$. Entonces

$$R\, T_{\widetilde{a}}\, R^* = M_{\gamma_a},$$

donde $\gamma_a \colon \Omega \to \mathbb{C}$,

$$\gamma_a(\xi) := \int_Y a(v)\, |q_\xi(v)|^2 \,\mathrm{d}\lambda(v).$$

Plan

Transformación del dominio, $G \times Y \to D_n$

$$G = \mathbb{R}^n, \quad Y := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+. \qquad D_n = \{z \in \mathbb{C}^n \colon \operatorname{Im}(z_n) - |z'|^2 > 0\}.$$

Transformación del dominio, $G \times Y \to D_n$

$$G = \mathbb{R}^n, \quad Y := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+. \qquad D_n = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ \mathrm{Im}(z_n) - |z'|^2 > 0\}.$$

$\varphi\colon G \times Y \to D_n,$

$$\varphi(u,v) := \Big(u' + v' + \mathrm{i}\, v', u_n + \mathrm{i}\,(v_n + |u'|^2 + 2|v'|^2) - 2(1-\mathrm{i})\langle u', v'\rangle\Big).$$

$$\varphi(u,v) = \Big(u' + (1+\mathrm{i})v',\ u_n + \mathrm{i}\,(v_n + |u' + (1+\mathrm{i})v'|^2) - 2\langle u', v'\rangle\Big).$$

Transformación del dominio, $G \times Y \to D_n$

$$G = \mathbb{R}^n, \quad Y := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+. \qquad D_n = \{z \in \mathbb{C}^n \colon \operatorname{Im}(z_n) - |z'|^2 > 0\}.$$

$\varphi \colon G \times Y \to D_n$,

$$\varphi(u,v) := \Big(u' + v' + \mathrm{i}\, v', u_n + \mathrm{i}\,(v_n + |u'|^2 + 2|v'|^2) - 2(1-\mathrm{i})\langle u', v'\rangle\Big).$$

$$\varphi(u,v) = \Big(u' + (1+\mathrm{i})v',\ u_n + \mathrm{i}\,(v_n + |u' + (1+\mathrm{i})v'|^2) - 2\langle u', v'\rangle\Big).$$

$$\varphi^{-1}(x' + \mathrm{i}\, y', x_n + \mathrm{i}\, y_n) = (x' - y',\ x_n + 2\langle x', y'\rangle - 2|y'|^2,\ y',\ y_n - |x'|^2 - |y'|^2).$$

U_φ es un isomorfismo isométrico

$$U_\varphi \colon \mathcal{A}^2(D_n, \widetilde{\mu}_{n,\alpha}) \to H < L^2(G \times Y),$$

$$(U_\varphi f)(u,v) := \sqrt{p_{n,\alpha}(\varphi(u,v))}\, f(\varphi(u,v)) = \sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{4\pi^n\,\Gamma(\alpha+1)}}\, v^{\alpha/2}\, f(\varphi(u,v)).$$

U_φ es un isomorfismo isométrico

$$U_\varphi \colon \mathcal{A}^2(D_n, \widetilde{\mu}_{n,\alpha}) \to H < L^2(G \times Y),$$

$$(U_\varphi f)(u,v) := \sqrt{p_{n,\alpha}(\varphi(u,v))}\, f(\varphi(u,v)) = \sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{4\pi^n\,\Gamma(\alpha+1)}}\, v^{\alpha/2}\, f(\varphi(u,v)).$$

El jacobiano real de φ es 1.

U_φ es un isomorfismo isométrico

$$U_\varphi \colon \mathcal{A}^2(D_n, \widetilde{\mu}_{n,\alpha}) \to H < L^2(G \times Y),$$

$$(U_\varphi f)(u,v) := \sqrt{p_{n,\alpha}(\varphi(u,v))}\, f(\varphi(u,v)) = \sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{4\pi^n\,\Gamma(\alpha+1)}}\, v^{\alpha/2} f(\varphi(u,v)).$$

El jacobiano real de φ es 1.

Proposición

U_φ es un isomorfismo isométrico.

Transformamos la acción ρ_{nil} en traslaciones horizontales

Proposición

Para cada g en $\mathbb{R}^n$,

$$\tau_{\text{nil}}(g) \circ \varphi = \varphi \circ \tau_{G \times Y}(g).$$

Transformamos la acción ρ_{nil} en traslaciones horizontales

Proposición

Para cada g en $\mathbb{R}^n$,

$$\tau_{\text{nil}}(g) \circ \varphi = \varphi \circ \tau_{G\times Y}(g).$$

En otras palabras,

$$\tau_{\text{nil}}(g)(\varphi(u, v)) = \varphi(u + g, v).$$

Transformamos la acción ρ_{nil} en traslaciones horizontales

Proposición

Para cada g en $\mathbb{R}^n$,

$$\tau_{\mathrm{nil}}(g) \circ \varphi = \varphi \circ \tau_{G\times Y}(g).$$

En otras palabras,

$$\tau_{\mathrm{nil}}(g)(\varphi(u,v)) = \varphi(u+g,v).$$

Corolario

Para cada g en $\mathbb{R}^n$,

$$\rho_{\mathrm{nil}}(g)\, U_\varphi = U_\varphi\, \rho_H(g).$$

U_φ intercambia ρ_{nil} con ρ_H

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^2 \arrow[r, "U_\varphi"] \arrow[d, "\rho_{\mathrm{nil}}(g)"'] & H \arrow[d, "\rho_H(g)"] \\
\mathcal{A}^2 \arrow[r, "U_\varphi"'] & H
\end{tikzcd}$$

El núcleo nuevo

$$K_{(x,y)}(u,v) = \sqrt{p_{n,\alpha}(\varphi(x,y))}\,\sqrt{p_{n,\alpha}(\varphi(u,v))}\,K^{\mathcal{A}^2}_{\varphi(x,y)}(\varphi(u,v)).$$

El núcleo nuevo

$$K_{(x,y)}(u,v) = \sqrt{p_{n,\alpha}(\varphi(x,y))}\,\sqrt{p_{n,\alpha}(\varphi(u,v))}\,K^{\mathcal{A}^2}_{\varphi(x,y)}(\varphi(u,v)).$$

Proposición

$$K_{x,y}(u,v) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{4\pi^n\,\Gamma(\alpha+1)}\,\frac{v^{\alpha/2}\,y^{\alpha/2}}{\left(E_{x,y}(u,v)\right)^{n+\alpha+1}}, \quad \text{donde}$$

$$\begin{aligned} E_{x,y}(u,v) = {} & \frac{u_n - x_n}{2\,\mathrm{i}} + \frac{v_n + y_n}{2} \\ & + \frac{|u' - x'|^2 + |v' - y'|^2 + \langle u' - x', v' - y' \rangle + \mathrm{i}\,\langle u' - x', v' + y' \rangle}{2}. \end{aligned}$$

Estamos preparados para aplicar el esquema

G actúa en H por la regla

$$(u, v) \mapsto (u + g, v).$$

Estamos preparados para aplicar el esquema

G actúa en H por la regla

$$(u, v) \mapsto (u + g, v).$$

El núcleo de H es invariante bajo las traslaciones horizontales, y tenemos una fórmula explícita para $K_{0,y}$:

$$K_{0,y}(u, v) = \frac{\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{4\pi^n \, \Gamma(\alpha+1)} \, v^{\alpha/2} y^{\alpha/2}}{\left(\frac{u_n}{2\,\mathrm{i}} + \frac{v_n + y_n}{2} + \frac{|u'|^2}{2} + |v' - y'|^2 + \langle u', v' - y' \rangle + \mathrm{i}\, \langle u', v' + y' \rangle\right)^{n+\alpha+1}}.$$

Problema geométrico: ¿cómo encontrar un cambio de variable apropiado?

En varios ejemplos, incluso en este caso nilpotente,
el dominio original X no es de la forma $G \times Y$
o la acción original $\sigma\colon G \to S_X$ no es de la forma $\sigma(g)(u,v) = (u+g,v)$.

Problema geométrico: ¿cómo encontrar un cambio de variable apropiado?

En varios ejemplos, incluso en este caso nilpotente,
el dominio original X no es de la forma $G \times Y$
o la acción original $\sigma\colon G \to S_X$ no es de la forma $\sigma(g)(u,v) = (u+g,v)$.

Necesitamos encontrar un cambio de variable adecuado.

Problema geométrico: ¿cómo encontrar un cambio de variable apropiado?

En varios ejemplos, incluso en este caso nilpotente,
el dominio original X no es de la forma $G \times Y$
o la acción original $\sigma\colon G \to S_X$ no es de la forma $\sigma(g)(u,v) = (u+g,v)$.

Necesitamos encontrar un cambio de variable adecuado.

Raúl Quiroga Barranco nos mencionó una condición importante
para reducir la situación a nuestro esquema:
es necesario, que la acción original σ sea libre, esto es,

$$\forall g \in G \quad \Big(\exists x \in X \quad \sigma(g)(x) = x\Big) \quad \Longrightarrow \quad g = e_G.$$

Problema geométrico: ¿cómo encontrar un cambio de variable apropiado?

Sea $G = \mathbb{R}^n$ y sea X un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+m}$.

Supongamos que:

- $\sigma\colon G \to S_X$ es una acción,
- $\sigma(g)$ es suave para cada g,
- $\sigma(g)$ es isométrica para cada g,
- σ es libre.

Problema geométrico: ¿cómo encontrar un cambio de variable apropiado?

Sea $G = \mathbb{R}^n$ y sea X un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+m}$.

Supongamos que:

- $\sigma\colon G \to S_X$ es una acción,
- $\sigma(g)$ es suave para cada g,
- $\sigma(g)$ es isométrica para cada g,
- σ es libre.

Construir $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ y $\varphi\colon \mathbb{R}^n \times Y \to X$ tales que:

- φ es suave y biyectiva,
- $\sigma(g)(\varphi(u, v)) = \varphi(u + g, v)$ para cada $g, u \in G$, $v \in Y$.

Plan

1. Objetos de estudio
2. Esquema para dominios $G \times Y$
3. Cambio de variable
4. Transformada de Fourier del núcleo

Primera integral auxiliar: la transformada de Fourier de la potencia desplazada

Lema

Sean $p > 1$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\,\mathrm{d}x}{(a + \mathrm{i}\,b - \mathrm{i}\,x)^p} = \begin{cases} \dfrac{(2\pi)^p}{\Gamma(p)}\,\xi^{p-1}\,\mathrm{e}^{-2\pi\xi(a+\mathrm{i}\,b)}, & \xi > 0; \\ 0, & \xi \le 0. \end{cases}$$

Primera integral auxiliar: la transformada de Fourier de la potencia desplazada

Lema

Sean $p > 1$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\,\mathrm{d}x}{(a + \mathrm{i}\,b - \mathrm{i}\,x)^p} = \begin{cases} \dfrac{(2\pi)^p}{\Gamma(p)}\,\xi^{p-1}\,\mathrm{e}^{-2\pi\xi(a+\mathrm{i}\,b)}, & \xi > 0; \\ 0, & \xi \le 0. \end{cases}$$

Idea de demostración: para $p \in \{2, 3, \ldots\}$, usar los residuos.

Segunda integral auxiliar: la integral de Gauss con un desplazamiento complejo

Proposición

Sean $a > 0$, $b, c \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\bigl(-ax^2 + (b + \mathrm{i}\,c)x\bigr)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\;\mathrm{e}^{\frac{(b+\mathrm{i}\,c)^2}{4a}}.$$

Segunda integral auxiliar: la integral de Gauss con un desplazamiento complejo

Proposición

Sean $a > 0$, $b, c \in \mathbb{R}$. Entonces

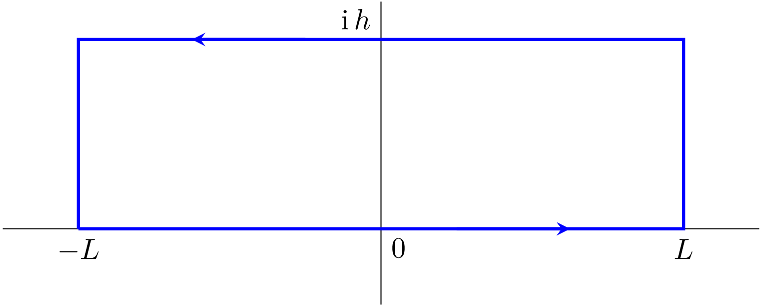
$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-ax^2 + (b + \mathrm{i}\, c)x\right) \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \mathrm{e}^{\frac{(b+\mathrm{i}\, c)^2}{4a}}.$$

Idea de demostración:

hacer un cambio de variable, reducir a la integral de Gauss.

Idea de demostración

$$\lim_{L\to+\infty}\int_{-L+\mathrm{i}\,h}^{L+\mathrm{i}\,h} \mathrm{e}^{-az^2}\,\mathrm{d}z = \lim_{L\to+\infty}\int_{-L}^{L} \mathrm{e}^{-az^2}\,\mathrm{d}z.$$



Transformada de Fourier del núcleo

Proposición

$$L_{\xi,y}(v) = \overline{q_\xi(y)}\, q_\xi(v),$$

donde

$$q_\xi(v) = c_{n,\alpha}\, \xi_n^{\frac{n+1}{4}+\frac{\alpha}{2}}\, v_n^{\frac{\alpha}{2}}\;\; \mathrm{e}^{-2\pi\xi_n v_n} \prod_{k=1}^{n-1} \exp\left(\pi(-1+\mathrm{i})\left(2\sqrt{\xi_n}v_k + \frac{\xi_k}{2\sqrt{\xi_n}}\right)^2\right).$$

Transformada de Fourier del núcleo

Proposición

$$L_{\xi,y}(v) = \overline{q_\xi(y)}\, q_\xi(v),$$

donde

$$q_\xi(v) = c_{n,\alpha}\, \xi_n^{\frac{n+1}{4}+\frac{\alpha}{2}}\, v_n^{\frac{\alpha}{2}}\; \mathrm{e}^{-2\pi\xi_n v_n} \prod_{k=1}^{n-1} \exp\left(\pi(-1+\mathrm{i})\left(2\sqrt{\xi_n}v_k + \frac{\xi_k}{2\sqrt{\xi_n}}\right)^2\right).$$

(La fórmula todavía no es segura.)

Conclusiones sobre el álgebra $\mathcal{C}(\rho_{\mathrm{nil}})$

$$\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+.$$

Conclusiones sobre el álgebra $\mathcal{C}(\rho_{\text{nil}})$

$\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$.

$R\,U_\varphi$ es un isomorfismo isométrico $\mathcal{A}^2(D_n, \widetilde{\mu}_{n,\alpha}) \to L^2(\Omega)$.

Conclusiones sobre el álgebra $\mathcal{C}(\rho_{\text{nil}})$

$\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$.

RU_φ es un isomorfismo isométrico $\mathcal{A}^2(D_n, \widetilde{\mu}_{n,\alpha}) \to L^2(\Omega)$.

El álgebra de von Neumann $\mathcal{C}(\rho_{\text{nil}})$ es isométricamente isomorfa a $L^\infty(\Omega)$.

Operadores de Toeplitz con símbolos generadores invariantes

Las funciones invariantes bajo τ_{nil} son de la forma

$$b(z) = a\big(\operatorname{Im}(z_1),\ \ldots,\operatorname{Im}(z_{n-1}),\ \operatorname{Im}(z_n) - |z'|^2\big),$$

donde $a \in L^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+)$.

Operadores de Toeplitz con símbolos generadores invariantes

Las funciones invariantes bajo τ_{nil} son de la forma

$$b(z) = a(\mathrm{Im}(z_1),\ \ldots, \mathrm{Im}(z_{n-1}),\ \mathrm{Im}(z_n) - |z'|^2),$$

donde $a \in L^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+)$.

En este caso $T_b \in \mathcal{B}(\mathcal{A}^2)$ es similar a $M_{\gamma_a} \in \mathcal{B}(L^2(\Omega))$, donde

$$\gamma_a(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+} a(v)\, |q_\xi(v)|^2 \,\mathrm{d}\mu_n(v).$$

Operadores de Toeplitz con símbolos generadores invariantes

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^2(D_n, \widetilde{\mu}_{n,\alpha}) \arrow[r, "U_\varphi"] \arrow[d, "T_b^{\mathcal{A}^2}"'] & H \leq L^2(G \times Y) \arrow[r, "R"] \arrow[d, "T_{\widetilde{a}}^H"'] & L^2(\Omega) \arrow[d, "M_{\gamma_a}"] \\
\mathcal{A}^2(D_n, \widetilde{\mu}_{n,\alpha}) \arrow[r, "U_\varphi"'] & H \leq L^2(G \times Y) \arrow[r, "R"] & L^2(\Omega)
\end{tikzcd}$$