

Solución de sistemas triangulares usando operaciones lineales por columnas

Objetivos. Resolver sistemas determinados de ecuaciones lineales con matrices triangulares, usando operaciones lineales con columnas de la matriz del sistema.

Requisitos. Matrices triangulares, operaciones lineales con vectores.

1. Ejemplo. Resolver por columnas el siguiente sistema triangular inferior de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x_1 & & & = & -2; \\ -3x_1 + x_2 & & & = & 7; \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 & & & = & 11. \end{cases}$$

Solución. El sistema se puede escribir como

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Comparando las primeras componentes en ambos lados de la ecuación hallamos x_1 :

$$x_1 = \frac{-2}{2} = -1.$$

Sustituimos el valor de x_1 y pasamos el sumando correspondiente al lado derecho:

$$x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = (+1) \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Simplificamos:

$$x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Al comparar las segundas componentes hallamos x_2 :

$$x_2 = 4.$$

Sustituimos el valor de x_2 y pasamos el sumando correspondiente al lado derecho:

$$x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Simplificamos:

$$x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Al comparar las terceras componentes hallamos x_3 :

$$x_3 = 2.$$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \quad \square$$

Solución del mismo ejemplo con notación breve. Denotamos las columnas por C_1, C_2, C_3 y el vector del lado derecho por b .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & -2 & 11 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{x_1=-1 \\ b+=C_1}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 4 & -2 & 12 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{x_2=4 \\ b+=-4C_2}} \left[\begin{array}{c|c} -2 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{x_3=2} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}. \quad \square$$

2. Ejercicio. Resuelva el sistema de ecuaciones lineales usando operaciones lineales por columnas y haga la comprobación:

$$\begin{cases} 3x_1 & & = & -3; \\ -x_1 + 2x_2 & & = & -5; \\ -4x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 9. \end{cases}$$

3. Ejemplo. Resolver el siguiente sistema triangular superior de ecuaciones lineales, usando operaciones lineales por columnas:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 2; \\ -x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -9; \\ 4x_3 + x_4 = -3; \\ -3x_4 = 9. \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{x_4=-3 \\ b+=3C_4}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{x_3=0 \\ b+=0C_3}} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & -3 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{x_2=3 \\ b+=-3C_2}} \left[\begin{array}{c|c} 2 & -4 \end{array} \right] & \xrightarrow{x_1=-2} x = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} &= -2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \quad \square \end{aligned}$$

4. Ejercicio. Resuelva el sistema de ecuaciones lineales usando operaciones por columnas y haga la comprobación:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -3; \\ -x_2 + 3x_3 = 8; \\ -3x_3 = -6. \end{cases}$$