Programación: rotaciones de Givens en el plano

Objetivos. Dado un vector v no nulo en $\mathbb{R}^2$, aprender a construir una matriz de rotación R que transforme v en un múltiplo positivo del vector básico e_1.

Requisitos. Programación con matrices, vectores y ciclos; matrices ortogonales; solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Deducción de las fórmulas

1. Sistema de ecuaciones. Está dado un vector $v = [x, y]^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}_2\}$. Buscamos un par de números $(c, s) \in \mathbb{R}^2$ tal que $c^2 + s^2 = 1$ y

$$\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

La condición $v \neq \mathbf{0}_2$ significa que

$$\sqrt{} = \|v\|_2 \neq 0.$$

Calculamos el producto de la matriz por el vector en el lado izquierdo de la igualdad (1), y copiamos el lado derecho:

$$\begin{bmatrix} \quad - \quad \\ \quad + \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Escribimos esta igualdad de vectores como un sistema de dos ecuaciones lineales con incógnitas c y s:

$$\boxed{}\, c - \boxed{}\, s = \sqrt{x^2+y^2} \tag{3}$$

$$\boxed{}\, c + \boxed{}\, s = 0. \tag{4}$$

El determinante del sistema es

$$\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \neq 0,$$

por eso el sistema tiene una única solución. En el siguiente ejercicio vamos a resolver este sistema.

2. Solución del sistema de ecuaciones (3) y (4). Sumamos la ecuación (3) multiplicada por x, con la ecuación (4) multiplicada por y:

$$(\qquad\qquad\qquad)c + 0s = \qquad\qquad\qquad.$$

Sumamos la ecuación (3) multiplicada por $-y$ con la ecuación (4) multiplicada por x:

$$0c + (\qquad\qquad\qquad)s = \qquad\qquad\qquad.$$

Denotando $\sqrt{x^2 + y^2}$ por r, escribimos la solución:

$$c = \qquad\qquad\qquad, \qquad s = \qquad\qquad\qquad. \tag{5}$$

3. Solución con números complejos. Vamos a resolver la misma ecuación (1) de otra manera, usando números complejos. Los pares de números (x, y), (c, s) se pueden escribir como números complejos:

$$z = (x, y) = x + \mathrm{i}\, y, \qquad u = (c, s) = c + \mathrm{i}\, s.$$

Como ya hemos visto en (2), el lado izquierdo de la ecuación vectorial (1) se escribe como el siguiente par ordenado de números reales o como un número complejo:

$$\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad, \qquad\qquad\qquad\qquad\Big) = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{parte real}} + \mathrm{i}\,(\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{parte imaginaria}}).$$

Este número complejo es el producto de los números complejos $\qquad$ y $\qquad$.
El vector del lado derecho de (1) también se escribe en términos de z:

$$\big(\sqrt{x^2 + y^2},\, 0\big) = \qquad.$$

Por eso la ecuación (1) se transforma en la ecuación

$$zu = |z|.$$

Su solución es

$$u = \frac{|z|}{z} = \frac{|z|\,\overline{z}}{z\,\overline{z}} = \frac{\qquad}{\qquad}.$$

La fórmula obtenida es equivalente a la fórmula (5).

4. Programación: el cálculo de los números *c* y *s* para un vector dado. Escriba una función que calcule los números c y s del ejercicio anterior para un vector dado $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}_2\}$:

```
function [cs] = givenscs(v),
   r = norm(v);
   c =
   s =
   cs = [c; s];
end
```

Multiplicación de una matriz 2×2 por una matriz

5. Cada renglón del producto de dos matrices es una combinación lineal de los renglones del segundo factor. Multiplique la matriz de rotación por una matriz general 2×3:

$$
\begin{aligned}
RA &= \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{c|c|c} \qquad\qquad & \qquad\qquad & \qquad\qquad \\ \hline \qquad\qquad & \qquad\qquad & \qquad\qquad \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

Copiamos el primer renglón de RA, luego lo escribimos como una combinación lineal:

$$
\begin{aligned}
(RA)_{1,*} &= \left[\begin{array}{c|c|c} \qquad\qquad & \qquad\qquad & \qquad\qquad \end{array}\right] \\
&= c \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad \end{bmatrix} + \qquad \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Hacemos una operación similar con el segundo renglón de RA:

$$
\begin{aligned}
(RA)_{1,*} &= \left[\begin{array}{c|c|c} \qquad\qquad & \qquad\qquad & \qquad\qquad \end{array}\right] \\
&= \qquad \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad \end{bmatrix} + \qquad \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Resumen. Cada renglón de RA se escribe como una combinación lineal de los renglones de A:

$$
(RA)_{1,*} = \boxed{\qquad} A_{1,*} + \boxed{\qquad} A_{2,*}, \qquad (RA)_{2,*} = \boxed{\qquad} A_{1,*} + \boxed{\qquad} A_{2,*}.
$$

6. Escriba una función que multiplique la matriz de rotación determinada por dos números c y s, por la matriz dada de tamaño $2 \times m$, sin construir la matriz de rotación en forma explícita.

```
function [B] = mulrotation22bymatrix(cs, A),
   B = zeros(size(A));
   B(1, :) = cs(1) * A(1, :) + ??? * A(2, :);
   B(2, :) =  ???  * A(1, :) + ??? * A(2, :);
end
```

Comprobación

7. Escriba una función que construya y devuelva la matriz de rotación 2×2 determinada por dos números c y s:

```
function [R] = rotationmatrix22(cs),
   R = [ cs(1), ???; ???, ??? ];
end
```

8. Comprobación. Escribimos una función que calcula los números c y s para la primera columna de una matriz A, y luego multiplica la matriz de rotación por esta matriz A.

```
function [] = testrotation22(),
   A = [-3, 5, 7, 6; 2, 4, 0, -5];
   cs = givenscs(A(:, 1));
   B = mulrotation22bymatrix(cs, A);
   R = rotationmatrix22(cs);
   display(A);
   display(cs);
   display(R);
   display(B);
   display(R * A);
end
```