Descomposición QR

Problemas para examen

Agradezco a Aldo Iván Leal García por varias correcciones importantes.

Reflexión de Householder (repaso)

1. Reflexión ortogonal respecto a un hipersubespacio (repaso). Sea $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$. Recuerde la fórmula para la matriz H_a que realiza la reflexión ortogonal respecto al subespacio $\{a\}^\perp$.

2. Propiedades de la reflexión ortogonal (repaso). Sea $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$. Recuerde la demostración de las propiedades principales de H_a:

$$H_a^2 = I_n, \qquad H_a^\top = H_a, \qquad H_a^\top H_a = I_n.$$

Sea $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Muestre que

$$H_{\mu a} = H_a.$$

Sean $x \in \ell(a)$, $y \in \{a\}^\perp$. Muestre que

$$H_a x = -x, \qquad H_a y = y.$$

3. Reflexión ortogonal que transforma un vector unitario en otro (repaso). Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $\|x\| = \|y\|$ y $x \neq y$. Encuentre un vector $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ tal que $H_a x = y$.

4. Reflexión de Householder que transforma un vector dado en un múltiplo positivo del vector básico $\boldsymbol{e_1}$ (repaso). Sea $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$. Encuentre un vector $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $H_a x \in \ell(e_1)$. Si $x_1 > 0$, entonces se recomienda elegir a de tal manera que

$$H_a x = -\|x\|\, e_1.$$

Si $x_1 \leq 0$, entonces se recomienda elegir a de tal manera que

$$H_a x = \|x\|\, e_1.$$

Estas recomiendaciones ayudan evitar la cancelación catastrófica.

5. Algoritmo householdervector (repaso). En algún lenguaje de programación realice el algoritmo que calcule el vector v del problema anterior.

> Entrada: un vector $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \neq \|x\| e_1$
>
> Salida: un vector $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $H_v x \in \ell(e_1)$.

6. Número de operaciones en el algoritmo householdervector. Calcule el número de operaciones aritméticas (en la aritmética con punto flotante) en el algoritmo anterior. Puede suponer que el cálculo de la raíz cuadrada positiva es una función dada que necesita C_1 flops.

Construcción de la descomposición QR por medio de reflexiones ortogonales

7. El primer paso de la reducción de una matriz por medio de reflexiones ortogonales. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ tal que $A_{*,1} \neq \mathbf{0}_n$. Construya un vector $a \in \mathbb{R}^n$ tal que la matriz $B = H_v A$ tenga la propiedad $B_{*,1} \in \ell(e_1)$. Explique cómo calcular la matriz B de manera eficiente.

8. Paso número $\boldsymbol{p}$ de la reducción de una matriz por medio de reflexiones ortogonales. Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ y $p \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tales que $A(p : n, 1 : (p-1)) = 0$. Construya un vector $a \in \mathbb{R}^{n-p+1}$ tal que la matriz $B = H_v A(p : n, 1 : m)$ tenga la propiedad $B(:, 1) \in \ell(e_1)$. Explique cómo calcular la matriz B de manera eficiente.

9. Una parte del algoritmo QR: construcción de la matriz R. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Explique cómo transformar A en una matriz triangular superior por medio de reflexiones ortogonales. Realice el algoritmo en un lenguaje de programación, haga pruebas y analice cómo se cambia el tiempo de ejecución del algoritmo dependiendo de m (con $n = m$ o $n = 2m$).

10. Recuerde las propiedades de las matrices ortogonales.

11. Algoritmo QR completo por medio de reflexiones ortogonales. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. Explique cómo construir una matriz $Q \in O_m(\mathbb{R})$ y una matriz triangular superior $R \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ tales que $A = QR$. Haga pruebas y analice cómo se cambia el tiempo de ejecución del algoritmo dependiendo de m (con $n = m$ o $n = 2m$).

12. Número de operaciones aritméticas. Calcule el número de multiplicaciones en el algoritmo anterior suponiendo que el algoritmo householdervector aplicado a un vector de longitud q realiza $C_1 q + C_2$ operaciones.

Unicidad de la descomposición QR

En este subtema se considera solamente el caso de matrices cuadradas y se supone que las entradas diagonales de la matriz R son positivas.

13. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz normal ($A^\top A = AA^\top$) y al mismo tiempo triangular superior. Demuestre que A es diagonal.

14. Muestre que cada matriz ortogonal es normal.

15. Describa la clase de las matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que al mismo tiempo son ortogonales, triangulares superiores y tienen entradas diagonales positivas.

16. Recuerde la demostración del teorema que las matrices ortogonales forman un grupo.

17. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz triangular superior. Demuestre que A es invertible si y sólo si $A_{i,i} \neq 0$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

18. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz triangular superior invertible. Demuestre que su inversa A^{-1} también es triangular superior.

19. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada invertible, sean $Q_1, Q_2 \in O(n, \mathbb{R})$ y $R_1, R_2 \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{R})$ tales que $A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$, y las entradas diagonales de R_1 y R_2 son estrictamente positivas. Demuestre que $Q_1 = Q_2$ y $R_1 = R_2$.

Otros métodos para construir la factorización QR

20. Recuerde las fórmulas del algoritmo modificado de Gram–Schmidt.

21. Algoritmo modificado de Gram–Schmidt: una parte. Realice el algoritmo de Gram–Schmidt en algún lenguaje de programación. Los vectores originales están dados como las columnas de una matriz A.

> Entrada: $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $\mathrm{r}(A) = m \le n$.
>
> Salida: $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ tal que las columnas de B son ortonormales y $B(:, j)$ es una combinación lineal de $A(:, k)$ con $1 \le k \le j$.

22. Factorización QR reducida por medio del algoritmo modificado de Gram–Schmidt. Realice el algoritmo de Gram–Schmidt en algún lenguaje de programación. Los vectores originales están dados como las columnas de una matriz A.

> Entrada: $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $\mathrm{r}(A) = m \le n$.
>
> Salida: $Q \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $R \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ tales que $A = QR$, $Q^\top Q = I_m$ y R es triangular superior.

23. Tema para exponer. Muestre cómo construir una factorización QR usando matrices de rotación (rotaciones de Givens).

Descomposición QR reducida (delgada)

24. En el caso si $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ con $n > m$, el algoritmo QR produce un par de matrices (Q, R) tales que

$$Q \in O(n, \mathbb{R}), \qquad R \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}), \qquad (\forall j \geq k \quad R_{j,k} = 0).$$

Formamos las matrices $\tilde{Q}$ y $\tilde{R}$ de la siguiente manera:

$$\tilde{Q} = Q_{*,\{1,\ldots,m\}}, \qquad \tilde{R} = R_{\{1,\ldots,m\},*}.$$

En el lenguaje de MATLAB,

```
Qtilde = Q(:, 1 : m);
Rtilde = R(1 : m, :);
```

Por ejemplo, si $A \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$, entonces Q y R son de la forma, y las submatrices $\tilde{Q}$ y $\tilde{R}$ están marcadas con verde:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} & Q_{1,5} \\ Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} & Q_{1,5} \\ Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} & Q_{1,5} \\ Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} & Q_{1,5} \\ Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} & Q_{1,5} \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} \\ 0 & R_{2,2} & R_{2,3} \\ 0 & 0 & R_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Muestre que $A = \tilde{Q}\tilde{R}$.

25. Algoritmo qrthin. Usando la función programada anteriormente que realiza la descomposición QR completa escriba una función **qrthin** que construya la descomposición QR reducida de una matriz dada.

Aplicación de la descomposición QR a la solución de sistemas de ecuaciones lineales

26. Algoritmo solveut (repaso). Escriba un algoritmo que resuelva los sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Ux = b$, donde U es una matriz cuadrada triangular superior con entradas diagonales no nulas. Puede trabajar con entradas o usar operaciones de nivel 1 (el producto interno de vectores o la operación saxpy).

> Entrada: una matriz U triangular superior con entradas diagonales no nulas, un vector b cuya longitud coincide con el orden de la matriz U.
>
> Salida: un vector x tal que $Ux = b$.

Se recomienda programar 4 versiones del algoritmo:

1. Que use el producto interno (nivel 1).
2. Que trabaje con entradas (nivel 0) y lea las entradas de U por renglones. Este algoritmo se obtiene del algoritmo del inciso 1 al sustituir el producto interno por un ciclo.
3. Que use la operación saxpy (nivel 1), es decir, que haga operaciones lineales con fragmentos de columnas de U.
4. Que trabaje con entradas (nivel 0) y lea las entradas de U por columnas. Este algoritmo se obtiene del algoritmo del inciso 3 al sustituir la operación saxpy por un ciclo.

27. Pruebas del algoritmo solveut. Haga pruebas de los 4 algoritmos del problema anterior, primero con matrices de órdenes pequeños, luego con matrices aleatorias de órdenes grandes. Analice cómo se cambia el tiempo de ejecución dependiendo de n. Compare la velocidad de las 4 versiones del algoritmo.

28. Número de operaciones aritméticas en el algoritmo solveut. Calcule el número de multiplicaciones en alguna de las versiones del algoritmo solveut.

29. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada invertible y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Explique cómo resolver el sistema $Ax = b$ usando la factorización QR de la matriz A. Escriba el algoritmo correspondiente y calcule el número de multiplicaciones.

Proyección ortogonal y complemento ortogonal (repaso de la teoría que se ve en cursos de álgebra lineal y análisis)

30. Ortogonalidad de vectores como una relación binaria. Recuerde la definición de la relación binaria $\perp$. Determine si $\perp$ es reflexiva; simétrica; transitiva.

31. Complemento ortogonal de un conjunto de vectores. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Explique el sentido de la notación $X^\perp$. Demuestre que $X^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

32. Complemento ortogonal del subespacio generado por un conjunto de vectores. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Denotemos por S al subespacio generado por X. Demuestre que $S^\perp = X^\perp$.

33. Teorema: relación entre la proyección ortogonal y el elemento más cercano. Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$, sea $b \in \mathbb{R}^n$ y sea $p \in S$. Demuestre que las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) $p - b \perp S$;

(b) $\|p - v\| \leq \|s - v\|$ para cada $s \in S$.

34. Teorema: existencia y unicidad del elemento más cercano en un conjunto convexo. Sea A un conjunto convexo no vacío en $\mathbb{R}^n$ y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que existe un único vector $p \in A$ tal que para cada $q \in A$

$$\|p - v\| \leq \|q - v\|.$$

35. Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Explique por qué S puede hacer el papel del conjunto A del teorema anterior; enuncie el resultado para S en vez de A.

36. Proyección ortogonal de un vector a un subespacio. Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Usando los resultados de los problemas anteriores demuestre que existe un único par de vectores (u, w) tales que

$$u \in S, \qquad w \in S^\perp, \qquad b = u + w.$$

En otras palabras, el espacio $\mathbb{R}^n$ es la suma directa de S y $S^\perp$.

37. Complemento ortogonal del complemento ortogonal de un subespacio. Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $(S^\perp)^\perp = S$.

38. Complemento ortogonal del complemento ortogonal de un conjunto de vectores. Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Encuentre $(X^\perp)^\perp$.

Mínimos cuadrados

En todos los problemas de esta sección estamos suponiendo que $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $\mathrm{r}(A) = m \le n$ y $b \in \mathbb{R}^n$.

39. Enunciado del problema. Explique qué se busca en el problema

$$\|Ax - b\| \to \min .$$

Muestre que este problema es equivalente al problema

$$\|Ax - b\|^2 \to \min$$

y exprese $\|Ax - b\|^2$ a través de las entradas de A, x, b.

40. Propiedades de la matriz $A^\top A$ en el problema de mínimos cuadrados. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{r}(A) = m \le n$.

1. Muestre que $\ker(A) = \{\mathbf{0}_m\}$.
2. Muestre que la matriz $A^\top A$ es simétrica.
3. Muestre que la matriz $A^\top A$ es positiva definida: si $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}_m\}$, entonces
$$x^\top (A^\top A) x > 0.$$
4. Muestre que la matriz $A^\top A$ es invertible.

41. Del problema de minimización a un sistema de ecuaciones lineales, via la proyección ortogonal. Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Usando la teoría de la proyección ortogonal muestre que las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) $\|Ax - b\| \le \|Ay - b\|$ para cada y en $\mathbb{R}^n$;

(b) $A^\top A x = A^\top b$.

42. Fórmulas para el gradiente de una forma lineal. Sea $u \in \mathbb{R}$. Definimos la función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mediante la regla $f(x) = u^\top x$. Calcule $(\nabla f)(x)$.

43. Fórmulas para el gradiente de una forma cuadrática. Sea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Definimos la función $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mediante la regla $g(x) = x^\top B x$. Calcule $(\nabla g)(x)$. Simplifique el resultado en el caso $B^\top = B$.

44. El punto crítico del problema de mínimos cuadrados. Consideremos la función $q\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida mediante la regla

$$f(x) = \|Ax - b\|^2.$$

Calcule $(\nabla f)(x)$. Muestre que $(\nabla f)(x) = \mathbf{0}_m$ si y sólo si x es la solución del sistema de ecuaciones $A^\top A x = A^\top b$.

45. La solución del sistema de ecuaciones normales es la solución del problema de mínimos cuadrados. Recordamos que la matriz $A^\top A$ es invertible. Sea $z \in \mathbb{R}^m$ tal que $A^\top A z = A^\top b$. Definimos $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \coloneqq \|Ax - b\|^2.$$

Muestre que para cada $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}_m\}$

$$f(x) - f(z) = (x - z)^\top A^\top A(x - z).$$

Se puede concluir de aquí que el punto z es el mínimo global estricto de la función f.

46. Algoritmo leastsquares. Explique cómo resolver el problema de mínimos cuadrados usando la factorización QR. Realice el algoritmo en algún lenguaje de programación. Calcule el número de operaciones de multiplicación que se usan en este método.

Matrices de valores de monomios y de funciones trigonométricas

Estos ejercicios son útiles para la tarea individual.

47. Matriz de valores de monomios algebraicos (matriz de Vandermonde). Escriba una función **algmonvalues** que construya la matriz de los valores de las funciones $1, x, x^2, \ldots, x^{m-1}$ en los puntos dados $x_1, \ldots, x_n$.

> Entrada: un arreglo x de puntos (denotemos su longitud por n), un número entero positivo m.
>
> Salida: la matriz $n \times m$ cuya entrada (j, k) es x_j^{k-1}.

Por ejemplo, si $n = 4$, $m = 3$, entonces la matriz es

$$V_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{bmatrix}.$$

48. Matriz de valores de funciones trigonométricas. Escriba una función **trigmonvalues** que construya la matriz de los valores de las funciones

$$1, \cos(x), \ldots, \cos(dx), \sin(x), \ldots, \sin(dx)$$

en los puntos dados $x_1, \ldots, x_n$. Por ejemplo, si $n = 3$, $d = 2$, entonces la matriz es

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(x_1) & \cos(2x_1) & \sin(x_1) & \sin(2x_1) \\ 1 & \cos(x_2) & \cos(2x_2) & \sin(x_2) & \sin(2x_2) \\ 1 & \cos(x_3) & \cos(2x_3) & \sin(x_3) & \sin(2x_3) \end{bmatrix}.$$