Reflexión ortogonal respecto a un hipersubespacio

Objetivos. Hallar la matriz de reflexión ortogonal respecto a un hipersubespacio.

Requisitos. Proyección ortogonal sobre una recta, matrices ortogonales.

1. Proyección ortogonal sobre una recta (repaso). Recuerde la definición geométrica de la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por el vector a. Escriba la matriz P_a de este operador lineal. Repase la demostración de las propiedades

$$P_a^2 = P_a, \qquad P_a^\top = P_a.$$

2. Concepto de hipersubespacio. Dado un vector no nulo $a \in \mathbb{R}^n$, el *hipersubespacio* ortogonal al vector a es el conjunto de todos los vectores ortogonales al vector a:

$$\{a\}^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \langle x, a\rangle = 0\}.$$

Es fácil ver que $\{a\}^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, y se puede demostrar que la dimensión de este subespacio es $n-1$. Más aún, se puede demostrar que cada subespacio de dimensión $n-1$ se puede representar como $\{a\}^\perp$, donde $a \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}_n\}$.

3. ¿Por qué "hiper"?. El prefijo "hiper-" significa "mayor", "superior", "por encima de lo normal", "mayor de lo normal". Cada hipersubespacio es un elemento máximo (por contención y por dimensión) en el conjunto de todos los subespacio de $\mathbb{R}^n$ que no coinciden con $\mathbb{R}^n$.

4. El punto del hipersubespacio más cercano a un punto dado. Sea $a \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}_n\}$ y sea $v \in \mathbb{R}^n$. Denotemos por S al hipersubespacio ortogonal al vector a:

$$S = \{a\}^\perp.$$

Escribimos v como $u + w$, donde $u \in \ell(a)$, $w \in S$. Sabemos que

$$u = P_a v = \frac{\langle a, v\rangle}{\|a\|^2}\, a, \qquad w = (I_n - P_a)v = v - \frac{\langle a, v\rangle}{\|a\|^2}\, a.$$

Se puede ver que w es el punto del subespacio S más cercano al punto v. En realidad, si $s \in S$, entonces $s \perp a$ y

$$\|v - s\|^2 = \|u + w - s\|^2 = \|u\|^2 + \|w - s\|^2.$$

La última igualdad se obtiene por el teorema de Pitágoras. Ahora se ve que $\|v-s\| \geq \|u\|$, y la igualdad se alcanza solamente cuando $s = w$.

5. Reflexión ortogonal respecto a un hipersubespacio. En la notación del razonamiento anterior, definimos el vector r de tal manera que

$$r - w = w - v.$$

Entonces el vector r se llama *la reflexión ortogonal del vector v respecto al hiperplano S*. Sustituyendo las fórmulas anteriores obtenemos

$$r = 2w - v = 2(I_n - P_a)v - v = (I_n - 2P_a)v.$$

6. La matriz de reflexión ortogonal respecto a un hipersubespacio. Dado $a \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}_0\}$, definimos la matriz H_a mediante la regla

$$H_a = I_n - 2P_a. \tag{1}$$

Sustituyendo la fórmula para P_a obtenemos

$$H_a = I_n - \frac{2}{\|a\|^2} aa^\top. \tag{2}$$

Se puede ver que

$$H_a(v) = v - \frac{2a^\top v}{a^\top a}\, a. \tag{3}$$

7. Cálculo de la reflexión ortogonal de un vector respecto a un hipersubespacio. Se sabe que el producto punto de dos vectores se calcula con n operaciones de multiplicación de números, igual que la operación axpy. Por otro lado, el producto diádico (columna por renglón) requiere n^2 operaciones de multiplicación de números. Calcule el número de operaciones de multiplicación necesarias para calcular la matriz H_a mediante la fórmula (2), y el número de operaciones de multiplicación que se utilizan en la fórmula (3).

8. Propiedades de la matriz de reflexión $\boldsymbol{H_a}$. Utilizando las propiedades conocidas de P_a demuestre las siguientes propiedades de H_a:

- es simétrica: $H_a^\top = H_a$.
- es una involución: $H_a^2 = I_n$.
- es ortogonal: $H_a^\top H_a = I_n$.

9. Sean $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Muestre que

$$H_{\lambda a} = H_a.$$

10. Imagen y núcleo del reflector de Householder (tarea adicional). Calcule $\operatorname{im}(H_a)$ y $\ker(H_a)$.

11. Valores y vectores propios del reflector de Householder (tarea adicional). Calcule el espectro de H_a. Explique cómo construir una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios de H_a.

12. Sean $u, w \in \mathbb{R}^n$ tales que $\|u\| = \|w\| = 1$. Construya un vector a tal que $P_a u = v$.