Matrices ortogonales, sus renglones y columnas

Objetivos. Demostrar el criterio de matrices ortogonales en términos de sus renglones y columnas.

Requisitos. Criterio de invertibilidad de matrices, el concepto de ortogonalidad de vectores.

Recordemos que si una matriz cuadrada A tiene una inversa izquierda B y una inversa derecha C, entonces $B = C$. Esta afirmación es muy simple y se generaliza a otras clases de objetos (operadores en espacios vectoriales de dimensión infinita, elementos de un monoide, etc.).

1 Proposición. *Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $BA = I_n$ y $AC = I_n$. Entonces $B = C$.*

Demostración. $C = I_nC = (BA)C = B(AC) = BI_n = B$. $\square$

También recordemos (sin demostración) que la invertibilidad de matrices por la izquierda y por la derecha son equivalentes.

2 Proposición. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *A es invertible, esto es, existe una matriz D en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $DA = I_n$ y $AD = I_n$;*

(b) *A es invertible por la izquierda, esto es, existe una matriz B en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $BA = I_n$;*

(c) *A es invertible por la derecha, esto es, existe una matriz C en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $AC = I_n$.*

La Proposición 2 es un resultado totalmente no trivial y se puede considerar como uno de los teoremas principales de álgebra lineal. Sus demostraciones utilizan varias herramientas fuertes de álgebra lineal, por ejemplo, el teorema sobre el rango y la nulidad de un operador lineal, o el concepto de matrices elementales y el proceso de eliminación gaussiana. En espacios vectoriales de dimensión infinita, existen operadores lineales invertibles solamente por la izquierda, y otros, invertibles solamente por la derecha.

Al combinar las Proposiciones 1 y 2, obtenemos el siguiente criterio.

3 Proposición. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *$BA = I_n$ y $AB = I_n$;*

(b) *$BA = I_n$;*

(c) *$BA = I_n$.*

4 Definición (el producto punto en $\mathbb{R}^n$, repaso)**.** Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$. Denotemos por $\langle a, b\rangle$ el *producto punto* de a y b, definido como

$$\langle a, b\rangle \coloneqq \sum_{j=1}^{n} a_j b_j. \tag{1}$$

El producto punto también se conoce como el *producto interno canónico* en $\mathbb{R}^n$.

En estos apuntes identificamos los elementos de $\mathbb{R}^n$ con matrices de tamaño $n \times 1$. El producto punto se puede escribir como

$$\langle a, b\rangle = a^\top b.$$

5 Definición (el producto punto en $\mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$)**.** Sean a, b dos vectores renglones de la misma longitud n: $a, b \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$. Su producto punto también se define por la fórmula (1).

6 Definición (ortogonalidad de dos vectores, repaso)**.** Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$. Se dice que a y b son *ortogonales* (entre si) y se escribe $a \perp b$ si $\langle a, b\rangle = 0$. La definición se extiende también a otros espacios con producto interno, por ejemplo, a $\mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$.

7 Definición (lista ortogonal de vectores, repaso)**.** Sean $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Se dice que $(a_1, \ldots, a_m)$ es una *lista ortogonal* o que los vectores $a_1, \ldots, a_m$ son *ortogonales* entre si (a pares), si

$$\forall p, q \in \{1, \ldots, m\} \qquad (p \neq q) \quad \Rightarrow \quad \langle a_p, a_q\rangle = 0.$$

Esta condición se puede escribir también en la siguiente forma:

$$\forall p, q \in \{1, \ldots, m\} \qquad \langle a_p, a_q\rangle = \|a_p\|^2\, \delta_{p,q}.$$

8 Definición (lista ortonormal de vectores, repaso)**.** Sean $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Se dice que $(a_1, \ldots, a_m)$ es una *lista ortonormal* o que los vectores $a_1, \ldots, a_m$ son *ortonormales*, si

$$\forall p, q \in \{1, \ldots, m\} \qquad \langle a_p, a_q\rangle = \delta_{p,q}.$$

9 Definición (sobre n vectores ortonormales en $\mathbb{R}^n$)**.** Es fácil ver (luego vamos a repasar la demostración) que cualquier lista ortonormal de vectores es linealmente independiente. Además se sabe que cualquier lista linealmente independiente de n vectores en un espacio vectorial de dimensión n es una base del espacio. Por tanto, si algunos n vectores de $\mathbb{R}^n$ forman una lista ortonormal, entonces automáticamente forman una base; en este caso se trata de una *base ortonormal*.

10 Proposición (una componente del producto de una matriz transpuesta por otra matriz)**.** *Sean* $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$*, y sean* $p, q \in \{1, \ldots, m\}$*. Entonces*

$$(A^\top B)_{p,q} = \langle A_{*,p}, B_{*,q}\rangle.$$

Demostración. Recordamos que $A_{*,p}$ es la p-ésima columna de la matriz A. Es un elemento del espacio $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, y su k-ésima componente es

$$(A_{*,p})_k = A_{k,p}.$$

Entonces

$$\langle A_{*,p} B_{*,q}\rangle = \sum_{k=1}^{n} (A_{*,p})_k (B_{*,q})_k = \sum_{k=1}^{n} A_{k,p} B_{k,p}.$$

Ahora la identidad que queremos demostrar sale fácilmente de las definiciones de operaciones con matrices:

$$(A^\top B)_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} (A^\top)_{p,k} B_{k,q} = \sum_{k=1}^{n} A_{k,p} B_{k,q}. \qquad \square$$

11 Proposición (una componente del producto de una matriz por otra matriz tranpuesta)**.** *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, y sean $p, q \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces*

$$(AB^\top)_{p,q} = \langle A_{p,*}, B_{q,*}\rangle.$$

Idea de demostración. Es muy similar a la demostración anterior. Hay que usar la definición $(A_{p,*})_k = A_{p,k}$ y la definición del producto punto de renglones. $\square$

12 Definición (matriz ortogonal)**.** Sea $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se dice que Q es ortogonal si $Q^\top A = I_n$ y $QQ^\top = I_n$.

13 Ejemplo.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En el curso de álgebra lineal numérica se utilizan mucho dos familias de matrices ortogonales: matrices de rotación en dos coordenadas (conocidas como rotaciones de Givens o de Jacobi) y matrices de reflexión ortogonal respecto a un hipersubespacio.

14 Teorema (criterio de matriz ortogonal, en términos de renglones y columnas)**.** *Sea $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $Q^\top Q = I_n$ *y* $QQ^\top = I_n$.

(b) $Q^\top Q = I_n$.

(c) $QQ^\top = I_n$.

(d) Las columnas de Q forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

(e) Los renglones de Q forman una base ortonormal de $\mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$.

Demostración. La igualdad de (a), (b), (c) sale del criterio de invertibilidad de matrices. La equivalencia de (b) y (d) se tiene por la Proposición 10, y la equivalencia de (c) y (e) por la Proposición 11. $\square$