Prerrequisitos de la asignatura
Análisis Numérico I

La asignatura *Análisis Numérico I* podría llamarse *Introducción al Álgebra Lineal Numérica* y requiere ciertos conocimientos, habilidades, destrezas, competencias de programación, de álgebra lineal y de análisis. A continuación están escritos varios ejercicios que se deben resolver antes de inscribirse a esta asignatura.

Prerrequisitos de programación y de métodos numéricos

Haber escrito al menos 2 500 lineas de código en algunos lenguajes de programación (esto corresponde a uno o dos semestres verdaderos de programación). Inscribirse al curso de Análisis Numérico I sin esta experiencia mínima sería tan absurdo como inscribirse la Teoría de la Relatividad Especial sin haber estudiado ningún curso de Física (o inscribirse a Ecuaciones Parciales sin haber cursar Cálculo I y II).

En particular, se requieren las siguientes experiencias elementales:

- Programar funciones cuyos argumentos y resultados son arreglos.
- Programar funciones para llamarlas en otras funciones.
- Programar funciones cuyos argumentos son funciones.
- Generar arreglos de números aleatorios (más precisamente, pseudoaleatorios).
- Inventar datos para hacer pruebas.
- Leer datos iniciales de archivos de texto y escribir resultados en archivos de texto.
- Detectar y corregir errores en programas.
- Medir el tiempo de ejecución de programas o funciones.
- Programar funciones con varios ciclos de tipo `for` que están encajados uno dentro del otro.
- Calcular el número de operaciones aritméticas en funciones del inciso anterior.
- Programar funciones con ciclos de tipo `while`.

Ejercicio 1 (multiplicación de una matriz por un vector). Programar una función que multiplique una matriz dada por un vector dado.

> Entrada: una matriz A, un vector b.
>
> Condición que satisface la entrada: se supone que el número de las columnas de A coincide con la longitud de b (suponer que esta condición se cumple y no verificarla).
>
> Salida: el vector Ab.

Calcular el número de operaciones de multiplicación y división que se realizan en el algoritmo, si A es una matriz cuadrada de orden n.

Ejercicio 2 (generar una matriz con una estructura especial). Escribir una función de un argumento entero positivo n que genere la matriz cuadrada $A = [A_{j,k}]_{j,k=1}^{n}$, donde

$$A_{j,k} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = k; \\ \dfrac{1}{|j-k|}, & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

En el código de la función evitar el uso del operador condicional.

Ejercicio 3 (solución de sistemas de ecuaciones lineales con matrices triangulares superiores). Programar el algoritmo de la sustitución hacia atrás que se usa para resolver sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Ux = b$, donde U es una matriz triangular superior de orden n con entradas diagonales no nulas y b es un vector de longitud n.

> Entrada: una matriz U y un vector b.
>
> Condiciones que satisface la entrada: la matriz U es cuadrada, triangular superior y tiene entradas diagonales no nulas, y la longitud del vector b coincide con el orden de U.
>
> Salida: un vector x tal que $Ux = b$.

Calcular el número de operaciones de multiplicación y división que se realizan en el algoritmo, si el orden de la matriz U es n.

Ejercicio 4 (solución de sistemas tridiagonales de ecuaciones lineales, usando pivotes diagonales). Los datos iniciales son los vectores a, b, c, r de longitudes n, $n-1$, $n-1$, n, respectivamente. Por ejemplo, para $n = 5$, se trata del sistema

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & r_1 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & r_2 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & 0 & r_3 \\ 0 & 0 & c_3 & a_4 & b_4 & r_4 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & a_5 & r_5 \end{array}\right].$$

Ejercicio 5 (método del punto fijo). Escribir una función que realice el *método del punto fijo* llamado también el *método de iteración simple*. El algoritmo debe terminarse cuando la distancia entre dos aproximaciones sucesivas es menor que el número t dado o cuando el número de las iteraciones hechas es mayor que el número m dado.

> Entrada: una función f, un punto inicial a, el número máximo de pasos m y la "tolerancia" $t > 0$.
>
> Salida: una aproximación del punto fijo.
>
> Ejemplo para hacer pruebas: $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$, $a = 1$.

Ejercicio 6 (método de bisección). Escribir una función que realice el método de bisección. El algoritmo debe terminarse cuando la distancia entre los extremos del intervalo encontrado es menor que el número t dado o cuando el número de las iteraciones hechas es mayor que el número m dado.

> Entrada: una función f, dos números reales a y b, el número máximo de pasos m y la "tolerancia" t.
>
> Condiciones que satisface la entrada: f tiene un argumento real y regresa un valor real, $a < b$, $f(a)f(b) < 0$, $m > 0$, $t > 0$.
>
> Salida: una aproximación de un cero de f en $[a, b]$.

Prerrequisitos de álgebra lineal

- Demostrar propiedades de operaciones con matrices.
- Comprender la estructura del producto de matrices (por ejemplo, comprender que cada columna del producto AB es una combinación lineal de las columnas de A).
- Aplicar criterios de invertibilidad de una matriz cuadrada.
- Aplicar el teorema sobre el rango y la nulidad (dimensión de la imagen y del núcleo).
- Practicar los algoritmos principales para espacios euclidianos o unitarios: proyección de un vector sobre el subespacio generado por una lista de vectores ortogonales, ortogonalización de Gram–Schmidt, cálculo de la matriz de Gram.
- Demostrar los teoremas principales sobre el concepto de ortogonalidad: la desigualdad de Schwarz, el teorema sobre la proyección de un vector sobre el subespacio generado por una lista de vectores ortogonales, corolario sobre la independencia lineal de una lista ortogonal de vectores no nulos, el teorema sobre la conservación de subespacios generados en la ortogonalización de Gram–Schmidt.
- Trabajar con varias descripciones equivalentes de matrices ortogonales (en el caso real) o unitarias (en el caso complejo).
- Demostrar propiedades espectrales de matrices autoadjuntas (hermitianas) o reales simétricas.

Ejercicio 7. Sea A una matriz real cuadrada de orden n. Escribir al menos 12 condiciones equivalentes a la condición que A es invertible. Notamos que en total se pueden encontrar más de 20 condiciones equivalentes a la invertibilidad de A.

Ejercicio 8. Sean A y B dos matrices reales cuadradas triangulares superiores del mismo tamaño. Demostrar que su producto AB también es una matriz triangular superior y deducir una fórmula para las entradas diagonales de la matriz AB.

Ejercicio 9. Sea A una matriz cuadrada de orden n con entradas reales. Supongamos que A es invertible por la izquierda, es decir, existe una matriz B tal que $BA = I_n$. Demostrar que A es invertible por la derecha.

Ejercicio 10. En el espacio $\mathbb{R}^2$ con el producto interno canónico (el producto punto) consideremos los vectores

$$v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Denotemos por S a la recta generada por el vector a. Construir vectores $u, w \in \mathbb{R}^2$ tales que $v = u + w$, $u \in S$ y $w \perp S$.

Ejercicio 11. Sea A una matriz real cuadrada de orden n cuyan columnas forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que los renglones de A también forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Prerrequisitos de análisis

- Verificar que una función es contractiva.
- Demostrar el teorema sobre el punto fijo de una función contractiva.
- Saber la definición de las normas $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_\infty$ en el espacio $\mathbb{R}^n$.
- Demostrar la equivalencia de las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$.
- Trabajar con la norma de un operador lineal.

Ejercicio 12. Sea $f\colon [a,b] \to [a,b]$ una función continua y derivable, con

$$L \coloneqq \sup_{x\in(a,b)} |f'(x)| < 1.$$

¿Cuántos pasos del método del punto fijo serán suficientes para aproximar el punto fijo de f con la precisión $\le \varepsilon$?

Ejercicio 13. Escribir cuatro definiciones equivalentes de la norma de un operador lineal.

Ejercicio 14. Sea A una matriz real cuadrada de orden n. Denotemos por T al operador lineal asociado a esta matriz:

$$T(x) \coloneqq Ax \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Demostrar que la norma del operador lineal T es finita.

Ejercicio 15. Sea A una matriz real cuadrada de orden n. Calcular el gradiente de la función

$$q(x) \coloneqq x^\top A\, x.$$

Sugerencia: si es difícil resolver el problema en general, entonces puede empezar con el caso particular $n = 2$ o $n = 3$.

Ejercicio 16. Sean a y b dos vectores del espacio $\mathbb{R}^n$. Se sabe que

$$\begin{array}{lll} \|a\|_1 = 8, & \|a\|_2 = 5, & \|a\|_\infty = 3, \\ \|b\|_1 = 11, & \|b\|_2 = 10, & \|b\|_\infty = 9. \end{array}$$

Escribir varias cotas superiores para $|a^\top b|$ y elegir la cota superior más precisa. Notamos que $a^\top b$ es lo mismo que el producto punto de los vectores a y b.