El producto de dos matrices como una suma de productos diádicos

Objetivos. Mostrar que el producto de dos matrices se puede escribir como una suma de productos diádicos.

1. Ejemplo. Sean $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$. Entonces

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \\ B_{3,1} & B_{3,2} \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{c|c} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} + A_{1,3}B_{3,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} + A_{1,3}B_{3,2} \\ \hline A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} + A_{2,3}B_{3,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} + A_{2,3}B_{3,2} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} A_{1,1}B_{1,1} & A_{1,1}B_{1,2} \\ \hline A_{2,1}B_{1,1} & A_{2,1}B_{1,2} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,2}B_{2,2} \\ \hline A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,2}B_{2,2} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} A_{1,3}B_{3,1} & A_{1,3}B_{3,2} \\ \hline A_{2,3}B_{3,1} & A_{2,3}B_{3,2} \end{array}\right] \\
&= \begin{bmatrix} A_{1,1} \\ A_{2,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{1,2} \\ A_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{1,3} \\ A_{2,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{3,1} & B_{3,2} \end{bmatrix} \\
&= A_{*,1}B_{1,*} + A_{*,2}B_{2,*} + A_{*,3}B_{3,*}.
\end{aligned}
$$

2. Sean $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Escriba el producto AB como una suma de productos diádicos, como en el ejemplo anterior.

3. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Escriba el producto AB como una suma de la forma

$$AB = \sum_{k=1}^{???} A_{???,???} B_{???,???}.$$

Ambos lados de esta igualdad son matrices $m \times p$. Después de escribir bien la igualdad, demuéstrela de manera formal (esta demostración no se pide en el examen).

4. En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto de dos matrices usando la fórmula del ejercicio anterior y la función programada anteriormente que calcula el producto diádico de dos vectores dados.