Propiedades de matrices
para el ajuste polinomial y trigonométrico

Objetivos. Estudiar las matrices que surgen en el problema del ajuste de datos por medio de polinomios algebraicos y trigonométricos, demostrar que son de rango completo.

1. Observación sobre el rango de una matriz. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, entonces $\mathrm{r}(A) \le m$ y $\mathrm{r}(A) \le n$, por eso $\mathrm{r}(A) \le \min\{m, n\}$.

2. Definición (matriz de rango completo). Se dicee que una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es *de rango completo* si

$$\mathrm{r}(A) = \min\{m, n\}.$$

Matrices de Vandermonde rectangulares y cuadradas

3. Definición (matriz de Vandermonde). Sean $m, n \in \{1, 2, \ldots\}$ y sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números. La matriz de Vandermonde $V_m(x_1, \ldots, x_n)$ se define de la siguiente manera:

$$V_m(x) = V_m(x_1, \ldots, x_n) = \left[x_j^{k-1}\right]_{j,k=1}^{n,m}.$$

4. Ejemplos.

$$V_2(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix}, \qquad V_4(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \end{bmatrix}.$$

5. Valores de polinomios en puntos dados y matrices de Vandermonde ($n = 4$). Sean $x_1, \ldots, x_4$ algunos números y sea P un polinomio de grado ≤ 3:

$$P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3.$$

Formemos el vector de los valores de P en los puntos $x_1, \ldots, x_4$:

$$\begin{bmatrix} P(x_1) \\ P(x_2) \\ P(x_3) \\ P(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 + x_1 p_1 + x_1^2 p_2 + x_1^3 p_3 \\ p_0 + x_2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_2^3 p_3 \\ p_0 + x_3 p_1 + x_3^2 p_2 + x_3^3 p_3 \\ p_0 + x_4 p_1 + x_4^2 p_2 + x_4^3 p_3 \end{bmatrix}.$$

Se ve que este vector se escribe como el producto de la matriz de Vandermonde por el vector de los coeficientes del polinomio:

$$\begin{bmatrix} P(x_1) \\ P(x_2) \\ P(x_3) \\ P(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = V(x_1, x_2, x_3, x_4)p.$$

6. Evaluación de un polinomio en puntos dados por medio de una matriz de Vandermonde. Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números y sea P un polinomio de grado $m-1$:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m-1} p_k x^k.$$

Entonces el vector de los valores de P en los puntos $x_1, \ldots, x_n$ se escribe como el siguiente producto:

$$\Big[P(x_j)\Big]_{j=1}^{n} = V_m(x_1, \ldots, x_n) \Big[p_{k-1}\Big]_{k=1}^{n}.$$

En efecto, la componente j del vector en el lado derecho es

$$\sum_{k=1}^{n} V_m(x_1, \ldots, x_n)_{j,k} p_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} p_{k-1} x_j^{k-1} = P(x_j).$$

7. Ejemplo (fórmula recursiva para los determinantes de matrices de Vandermonde).

$$\det V_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_4 & x_1^2 - x_1 x_4 & x_1^3 - x_1^2 x_4 \\ 1 & x_2 - x_4 & x_2^2 - x_2 x_4 & x_2^3 - x_2^2 x_4 \\ 1 & x_3 - x_4 & x_3^2 - x_3 x_4 & x_3^3 - x_3^2 x_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & x_1^2 - x_1 x_4 & x_1^3 - x_1^2 x_4 \\ x_2 - x_4 & x_2^2 - x_2 x_4 & x_2^3 - x_2^2 x_4 \\ x_3 - x_4 & x_3^2 - x_3 x_4 & x_3^3 - x_3^2 x_4 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{4-1} (x_1 - x_4)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= \det V_3(x_1, x_2, x_3) \prod_{j=1}^{3} (x_4 - x_j).$$

8. Lema (fórmula recursiva para el determinante de una matriz de Vandermonde cuadrada).

$$\det V_n(x_1, \ldots, x_n) = \det V_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \prod_{j=1}^{n-1} (x_n - x_j). \tag{1}$$

Idea de demostración. Generalizar el Ejemplo 7; por ejemplo, empezar con las operaciones elementales

$$C_n += -x_n C_{n-1}, \quad C_{n-1} += -x_n C_{n-2}, \quad \ldots, \quad C_2 += -x_n C_1,$$

expandir a lo largo del último renglón, etc. □

9. Teorema (fórmula para el determinante de una matriz de Vandermonde cuadrada).

$$\det V_n(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{1\le j<k\le n} (x_k - x_j). \tag{2}$$

Idea de demostración. Escribir (2) como

$$\det V_n(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{k-1}(x_k - x_j)$$

y razonar por inducción sobre n usando el Lema 8. □

10. Cada matriz de Vandermonde generada por puntos diferentes a pares es de rango completo. Sean $m,n\in\{1,2,\ldots\}$ y sean $x_1,\ldots,x_n$ algunos números diferentes a pares. Entonces

$$\mathrm{r}(V_m(x_1,\ldots,x_n)) = \min\{m,n\}.$$

Demostración. Denotemos $\min\{m,n\}$ por r. La desigualdad $\mathrm{r}(V_m(x_1,\ldots,x_n)) \le r$ es trivial. Por otro lado, la submatriz de $V_m(x_1,\ldots,x_n)$ ubicada en la intersección de los primeros r renglones con las primeras r columnas, es $V_r(x_1,\ldots,x_r)$, y por la fórmula (2) su determinante es distinto de cero. Además se sabe que le rango de la submatriz es menor o igual al rango de la matriz. Por eso

$$r = \mathrm{r}(V_r(x_1,\ldots,x_r)) \le \mathrm{r}(V_m(x_1,\ldots,x_n)) \le \min\{m,n\} = r. \qquad \square$$

Matrices de valores de monomios trigonométricos

11. Definición. Sean $n,d\in\{1,2,\ldots\}$ y sean $x_1,\ldots,x_n$ algunos números. Denotemos por $T_d(x_1,\ldots,x_n)$ a la matriz $n\times(2p+1)$ cuyo j-ésimo renglón está formado por los números

$$1,\quad \cos(x_j),\quad \ldots,\quad \cos(dx_j),\quad \mathrm{sen}(x_j),\quad \ldots,\quad \mathrm{sen}(dx_j).$$

Más formalmente,

$$(T_d(x_1,\ldots,x_n))_{j,k} = \begin{cases} \cos((k-1)x_j), & 1\le k\le d+1;\\ \mathrm{sen}((k-d-1)x_j), & d+2\le k\le 2d+1.\end{cases}$$

12. Ejemplo.

$$T_3(x_1,x_2,x_3) = \begin{bmatrix} 1 & \cos(x_1) & \cos(2x_1) & \cos(3x_1) & \mathrm{sen}(x_1) & \mathrm{sen}(2x_1) & \mathrm{sen}(3x_1)\\ 1 & \cos(x_2) & \cos(2x_2) & \cos(3x_2) & \mathrm{sen}(x_2) & \mathrm{sen}(2x_2) & \mathrm{sen}(3x_2)\\ 1 & \cos(x_3) & \cos(2x_3) & \cos(3x_3) & \mathrm{sen}(x_3) & \mathrm{sen}(2x_3) & \mathrm{sen}(3x_3)\end{bmatrix}.$$

13. Ejemplo (determinante de una matriz cuadrada de valores de monomios trigonométricos).

$$
\begin{aligned}
\det T_2(x_1,\ldots,x_5) &= \begin{vmatrix} 1 & \cos(x_1) & \cos(2x_1) & \operatorname{sen}(x_1) & \operatorname{sen}(2x_1) \\ & & \dotfill & & \\ 1 & \cos(x_5) & \cos(2x_5) & \operatorname{sen}(x_5) & \operatorname{sen}(2x_5) \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2^4\,\mathrm{i}^2} \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x_1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2x_1} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2x_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x_1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2x_1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2x_1} \\ & & \dotfill & & \\ 1 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x_5} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x_5} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2x_5} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2x_5} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x_5} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x_5} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2x_5} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2x_5} \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{C_2 \mathrel{+}= -C_4 \\ C_3 \mathrel{+}= -C_5}}{=\!=\!=} \frac{1}{2^2\,\mathrm{i}^2} \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x_1} & \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,x_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x_1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2x_1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2x_1} \\ & & \dotfill & & \\ 1 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x_5} & \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,x_5} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x_5} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x_5} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2x_5} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,2x_5} \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{C_4 \mathrel{+}= C_2 \\ C_5 \mathrel{+}= C_3}}{=\!=\!=} \frac{1}{2^2\,\mathrm{i}^2} \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x_1} & \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,x_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2x_1} \\ & & \dotfill & & \\ 1 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x_5} & \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,x_5} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x_5} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2x_5} \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{C_1 \leftrightarrow C_2 \\ C_2 \leftrightarrow C_3 \\ C_1 \leftrightarrow C_2}}{=\!=\!=} \frac{(-1)^3}{2^2\,\mathrm{i}^2} \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,x_1} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x_1} & 1 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x_1} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2x_1} \\ & & \dotfill & & \\ \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,x_5} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x_5} & 1 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x_5} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2x_5} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2^2}\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}(x_1+\cdots+x_5)} \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x_1} & \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,x_1} & \mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,x_1} & \mathrm{e}^{4\,\mathrm{i}\,x_1} \\ & & \dotfill & & \\ 1 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x_5} & \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,x_5} & \mathrm{e}^{3\,\mathrm{i}\,x_5} & \mathrm{e}^{4\,\mathrm{i}\,x_5} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2^2}\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}(x_1+\cdots+x_5)} \prod_{1\le j<k\le 5} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x_k} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x_j}) = -2^8 \prod_{1\le j<k\le 5} \operatorname{sen}\frac{x_k - x_j}{2}.
\end{aligned}
$$

14. Tarea adicional. Demostrar dos siguientes proposiciones sobre las matrices formadas por los valores de monomios trigonométricos. Se pueden usar ideas del ejemplo anterior, o se puede inventar algún otro camino. El ejemplo anterior no es muy difícil de entender, pero no es fácil explicar los mismos pasos para d general.

15. Proposición (determinante de una matriz cuadrada de valores de monomios trigonométricos).

$$
\det T_d(x_1,\ldots,x_{2d+1}) = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}}\, 2^{2d^2} \prod_{1\le j<k\le 2d+1} \operatorname{sen}\frac{x_k - x_j}{2}. \tag{3}
$$

16. Proposición (cada matriz de valores de monomios trigonométricos generada por puntos deferentes en $(-\pi,\pi]$ es de rango completo). Sean $n, d \in \{1,2,\ldots\}$ y sean $x_1,\ldots,x_n$ algunos números diferentes a pares en $(-\pi,\pi]$. Entonces

$$
\mathrm{r}(T_d(x_1,\ldots,x_n)) = \min\{n, 2d+1\}.
$$