Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica. Examen parcial I. Variante α.

Multiplicación de matrices. Matrices ortogonales.

Nombre: Calificación:

Problema 1. *15 %.*
Producto de dos matrices de permutación. Sean $\varphi, \psi \in S_n$. Demuestre que

$$P_\varphi P_\psi = P_{\psi\varphi}.$$

Problema 2. *20 %.*
Producto de dos matrices triangulares inferiores. Sean $A, B \in \mathrm{lt}_n(\mathbb{R})$.

I. Demuestre que $AB \in \mathrm{lt}_n(\mathbb{R})$.

II. En la suma que define la entrada $(AB)_{i,j}$ algunos sumandos se anulan. Explique por qué y escriba la suma que se queda.

III. Escriba una función en el lenguaje de programación MATLAB que calcule el producto AB de dos matrices triangulares inferiores A y B del mismo tamaño n. Se recomienda utilizar el producto punto de renglones cortados de A por columnas cortadas de B.

IV. Calcule el número de flops que hace la función del inciso III.

Problema 3. *15 %.*
Producto de matrices triangulares superiores. Sean $A, B \in \mathrm{ut}_n(\mathbb{R})$. Demuestre que $AB \in \mathrm{ut}_n(\mathbb{R})$ y deduzca una fórmula para $(AB)_{p,q}$ con $p \leqslant q$, omitiendo los sumandos nulos.

Problema 4. *20 %.*
Algoritmo de solución de sistemas unitriangulares superiores usando operaciones axpy por columnas. En algún lenguaje de programación escriba una función que resuelva sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Ux = b$, donde U es una matriz unitriangular superior $n \times n$ y b es un vector de lontigud n. Hay que usar operaciones axpy con fragmentos de columnas. Calcule el número de operaciones de multiplicación.

Problema 5. *20 %.*
Criterio para que una matriz cuadrada sea ortogonal. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes. Demuestre algunas tres de las seis implicaciones posibles.

(a) A es ortogonal, esto es,
$$A^\top A = I_n.$$

(b) A preserva producto interno, esto es,
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle.$$

(c) Las columnas de A son ortonormales:
$$\forall p, q \in \{1, \ldots, n\} \qquad \langle A_{*,p}, A_{*,q} \rangle = \delta_{p,q}.$$

Problema 6. *15 %.*
Construcción del vector de Householder. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ tal que x no es múltiplo de e_1.

I. Construya un vector $a \in \mathbb{R}^n$ tal que
$$H_a x = \|x\| e_1,$$
donde H_a es la reflexión ortogonal con respecto al hiperplano que pasa por el origen y es ortogonal al vector a.

II. Escriba una función en el lenguaje de MATLAB que calcule el vector a del inciso I.

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica. Examen parcial I. Variante β.

Multiplicación de matrices. Matrices ortogonales.

Nombre: Calificación:

Problema 1. *15 %.*
Propiedad distributiva izquierda del producto de matrices. Enuncie bien y demuestre la propiedad: $A(B + C) = AB + AC$.

Problema 2. *20 %.*
Producto de dos matrices como una suma de productos exteriores. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$.

I. Represente AB como la suma de ciertos productos exteriores (columnas por renglones).

II. Muestre cómo funciona la fórmula del inciso I en el caso $m = 2$, $n = 3$, $p = 2$. Puede escribir matrices con entradas generales $A_{1,1}, \ldots, A_{2,3}$, $B_{1,1}, \ldots, B_{3,2}$ o un ejemplo numérico.

III. Escriba una demostración formal de la fórmula del inciso I.

IV. Escriba una función en el lenguaje de programación MATLAB que calcule el producto de dos matrices A y B usando productos exteriores.

Problema 3. *15 %.*
Inversa de una matriz triangular inferior. Sea $A \in \mathrm{lt}_n(\mathbb{R})$ tal que $A_{p,p} \neq 0$ para cada $p \in \{1, \ldots, n\}$. Demuestre que $A^{-1} \in \mathrm{lt}_n(\mathbb{R})$.

Problema 4. *20 %.*
Algoritmo de multiplicación de una matriz triangular inferior por un vector, usando operaciones axpy por columnas. En algún lenguaje de programación escriba una función que multiplique una matriz triangular inferior dada por un vector dado, haciendo operaciones axpy con fragmentos de columnas y usando de manera eficiente la información que la matriz es triangular inferior. Suponiendo que la matriz es $n \times n$ calcule el número de operaciones de multiplicación.

Problema 5. *20 %.*
Proyección y reflexión ortogonal. Sea $v \in \mathbb{R} \setminus \{0_n\}$.

1. Denotemos por P_v a la matriz asociada a la proyección ortogonal sobre la recta generada por v. Escriba una fórmula explícita para la matriz P_v y demuestre las siguientes propiedades de P_v:
$$P_v^2 = P_v, \qquad P_v^\top = P_v.$$

2. Denotemos por H_v a la reflexión de Householder (reflexión ortogonal con respecto al hipersubespacio ortogonal al vector v). Escriba una fórmula explícita para la matriz H_v y demuestre las siguientes propiedades de H_v:
$$H_v^2 = I_n, \qquad H_v^\top = H_v, \qquad H_v^\top H_v = I_n.$$

Problema 6. *15 %.*
Construcción de la matriz de Givens. Sea $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

I. Encuentre una matriz de rotación R tal que el producto Rx sea un múltiplo positivo del vector e_1.

II. Escriba una función en el lenguaje de MATLAB que calcule la matriz R del inciso I.