

Álgebra Lineal Numérica.
Examen parcial III. Variante α .

Método de gradiente, método de gradiente conjugado, descomposición en valores singulares, cálculo de valores propios.

Nombre:

Calificación:

Problema 1. 15 %.

En algún lenguaje de programación escriba una función que realice el **método de gradiente conjugado**. Analice la complejidad de una iteración del algoritmo (cuente solamente las operaciones de multiplicación; suponga que el cálculo de la norma de un vector utiliza n multiplicaciones).

Problema 2. 15 %.

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y estrictamente positiva definida, sean $r^{(0)} = b \in \mathbb{R}^n$ y sea $x^{(0)} = 0_n$. Escriba las fórmulas recursivas del **método de gradiente conjugado** y demuestre por inducción el teorema sobre la igualdad de subespacios en este método: para cada s

$$\ell(r^{(0)}, r^{(1)}, \dots, r^{(s-1)}) = \ell(p^{(0)}, p^{(1)}, \dots, p^{(s-1)}) = \ell(r^{(0)}, Ar^{(0)}, \dots, A^{(s-1)}r^{(0)}).$$

Problema 3. 15 %.

Sea A una matriz real 2×2 . Construya su **descomposición en valores singulares**, si están dados dos vectores $p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$ y $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ que forman una base ortonormal de \mathbb{R}^2 y tales que

$$Ap = -2p, \quad Aq = 5q.$$

Problema 4. 15 %.

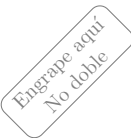
Paso inductivo para la existencia de una descomposición en valores singulares. Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$, $m \geq 1$, $n \geq 1$. Demuestre que existe un par de matrices unitarias U, V tales que

$$U^*AV = \left[\begin{array}{c|c} \|A\| & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right],$$

donde $B \in \mathcal{M}_{(m-1) \times (n-1)}(\mathbb{C})$.

Problema 5. 15 %.

Tridiagonalización de una matriz real simétrica. En algún lenguaje de programación escriba una función que transforme una matriz real simétrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a una matriz real simétrica tridiagonal B tal que B tenga los mismos valores propios que A .



Álgebra Lineal Numérica.

Examen parcial III. Variante β .

Método de gradiente, método de gradiente conjugado, descomposición en valores singulares, cálculo de valores propios.

Nombre:

Calificación:

Problema 1. 15 %.

En algún lenguaje de programación escriba una función que realice el **método de gradiente**. Analice la complejidad de una iteración del algoritmo (cuenta solamente las operaciones de multiplicación; suponga que el cálculo de la norma de un vector utiliza n multiplicaciones).

Problema 2. 15 %.

De un sistema de ecuaciones lineales a la minimización de una forma cuadrática. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y estrictamente positiva definida, y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Definimos $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x.$$

Denotemos por u al vector $A^{-1}b$. Enuncie y demuestre una fórmula que exprese la diferencia $f(x) - f(u)$ a través de la matriz A y la diferencia $x - u$. Además calcule el gradiente de la función f usando fórmulas conocidas para el gradiente de formas cuadráticas y lineales.

Problema 3. 15 %.

Sea A una matriz real 3×2 . Construya su **descomposición en valores singulares**, si están dados tres vectores w_1, w_2, w_3 que forman una base ortonormal del espacio \mathbb{R}^3 y tales que

$$AA^T w_1 = 4w_1, \quad AA^T w_2 = 9w_2, \quad AA^T w_3 = 0_3.$$

Problema 4. 15 %.

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ y sea (U, S, V) una **descomposición en valores singulares** de la matriz A . Denotemos las columnas de U y V por u_j y v_j , respectivamente.

I. Muestre que A se puede escribir como una combinación lineal de productos diádicos de la forma $u_j v_j^*$.

II. Dado $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$, calcule Ax .

III. Demuestre que $\ker(A) = \ell(v_{r+1}, \dots, v_n)$.

Problema 5. 15 %.

Valores y vectores propios de una matriz real simétrica 2×2 . En algún lenguaje de programación escriba una función de un argumento $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A^T = A$, que calcule y regrese números $c, s, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ tales que $c^2 + s^2 = 1$ y

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{1,2} & A_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}.$$