Operaciones con matrices

Temas adicionales para exponer

Teorema de Schur sobre el conmutador del álgebra de las matrices cuadradas

1. Multiplicación por vectores básicos (repaso). Escriba la definición de los vectores básicos e_p. Escriba las fórmulas para los productos Ae_p y $e_p^\top A$.

2. Matrices básicas y su expresión como productos diádicos de vectores básicos (repaso). Escriba la definición de $E_{p,q}$. Exprese $E_{p,q}$ como el producto diádico $ab^\top$ de algunos vectores básicos.

3. Productos por las matrices básicas.
Sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$. Calcule los productos $AE_{p,q}$ y $E_{p,q}A$, donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz arbitraria.

4. Productos de las matrices básicas.
Calcule el producto $E_{p,q}E_{r,s}$ donde $p, q, r, s \in \{1, \ldots, n\}$.

5. Matrices escalares conmutan con todas las matrices.
Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y sea $X = \lambda I_n$. Se dice que X es una *matriz escalar*. Demuestre que X conmuta con cualquier matriz Y perteneciente a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad XY = YX.$$

6. Teorema de Schur. Supongamos que $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz que conmuta con todas las matrices pertenecientes a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\forall Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad XY = YX.$$

Demuestre que X es una *matriz escalar*, esto es, existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $X = \lambda I_n$.

Producto de matrices por bloques

7. Producto de matrices por bloques. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ matrices divididas en bloques:

$$A = \begin{bmatrix} A^{(1,1)} & A^{(1,2)} \\ A^{(2,1)} & A^{(2,2)} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B^{(1,1)} & B^{(1,2)} \\ B^{(2,1)} & B^{(2,2)} \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{array}{llll} A^{(1,1)} \in \mathcal{M}_{m_1\times n_1}(\mathbb{R}), & A^{(1,2)} \in \mathcal{M}_{m_1\times n_2}(\mathbb{R}), & A^{(2,1)} \in \mathcal{M}_{m_2\times n_1}(\mathbb{R}), & A^{(2,2)} \in \mathcal{M}_{m_2\times n_2}(\mathbb{R}); \\ B^{(1,1)} \in \mathcal{M}_{n_1\times p_1}(\mathbb{R}), & B^{(1,2)} \in \mathcal{M}_{n_1\times p_2}(\mathbb{R}), & B^{(2,1)} \in \mathcal{M}_{n_2\times p_1}(\mathbb{R}), & B^{(2,2)} \in \mathcal{M}_{n_2\times p_2}(\mathbb{R}). \end{array}$$

Muestre que cada bloque del producto $C = AB$ se expresa de "manera natural" en términos de bloques de A y B:

$$\begin{array}{ll} C^{(1,1)} = A^{(1,1)}B^{(1,1)} + A^{(1,2)}B^{(2,1)}, & C^{(1,2)} = A^{(1,1)}B^{(1,2)} + A^{(1,2)}B^{(2,2)}, \\ C^{(2,1)} = A^{(2,1)}B^{(1,1)} + A^{(2,2)}B^{(2,1)}, & C^{(2,2)} = A^{(2,1)}B^{(1,2)} + A^{(2,2)}B^{(2,2)}. \end{array}$$

8. Producto de matrices por bloques y memoria cache. Muestre que la multiplicación de matrices por bloques puede ser útil si los bloques caben en la memoria cache de la unidad central de procesamiento (CPU).

Aplicaciones de matrices grandes

Modelo input-output de Leóntief en macroeconomía

9. Explique el modelo de Leóntief.

Matriz de PageRank

10. Explique como se define la matriz en el algoritmo PageRank de Google y que sentido tienen sus valores propios.

Solución numérica del problema de frontera

11. Aproximación de las derivadas de una función con diferencias divididas. Escriba y argumente las fórmulas de aproximación de las derivadas f', f'', f''' de una función en términos de sus diferencias divididas.

12. Aplicaciones de sistemas de ecuaciones lineales en la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Explique con un ejemplo cómo pueden surgir sistemas de ecuaciones lineales en la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias.

13. Aproximación de las derivadas parciales de una función con diferencias divididas. Escriba y argumente las fórmulas de aproximación de las derivadas parciales de una función en términos de sus diferencias divididas.

14. Aplicaciones de sistemas de ecuaciones lineales en la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales. Explique con un ejemplo cómo pueden surgir sistemas de ecuaciones lineales en la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales.

15. Aplicaciones de sistemas de ecuaciones lineales. Explique con un ejemplo cómo pueden surgir sistemas de ecuaciones lineales en matemática o en modelos de otras ciencias.

Algoritmo de Strassen

16. Fórmulas de Strassen para el producto de matrices 2×2.
Sean $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Consideremos los siguientes productos auxiliares:

$$\begin{aligned}
M_1 &\coloneqq (A_{1,1} + A_{2,2})(B_{1,1} + B_{2,2}),\\
M_2 &\coloneqq (A_{2,1} + A_{2,2})B_{1,1},\\
M_3 &\coloneqq A_{1,1}(B_{1,2} - B_{2,2}),\\
M_4 &\coloneqq A_{2,2}(B_{1,1} - B_{2,1}),\\
M_5 &\coloneqq (A_{1,1} + A_{1,2})B_{2,2},\\
M_6 &\coloneqq (A_{2,1} - A_{1,1})(B_{1,1} + B_{1,2}),\\
M_7 &\coloneqq (A_{1,2} - A_{2,2})(B_{2,1} + B_{2,2}).
\end{aligned}$$

Muestre que cada entrada del producto AB se puede escribir como una combinación lineal con coeficientes 1, -1, 0 de los productos $M_1, \ldots, M_7$.

17. Algoritmo recursivo de Strassen. Explique la idea del algoritmo recursivo de Strassen.

18. El número de los producto en el algoritmo recursivo de Strassen para matrices de orden $\boldsymbol{n = 2^k}$. Denotemos por $T(n)$ el número de las multiplicaciones en el algoritmo recursivo de Strassen aplicado a dos matrices de orden n. Exprese $T(n)$ a través de $T(n/2)$. Supongamos que $n = 2^k$ y denotemos $T(2^k)$ por $f(k)$. Escriba una recurrencia para $f(k)$. Calcule $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$. Escriba la fórmula general para $f(k)$ y para $T(n)$ donde $n = 2^k$.