

Estimación de Schur para la norma matricial

Objetivos. Demostrar una estimación superior para la norma matricial asociada a la norma euclídeana de vectores. Esta estimación se conoce como “Schur test” porque su generalización a operadores integrales da una condición suficiente (“test”) para que el operador sea acotado.

1. Normas matriciales (repaso). Para cada p en $[1, +\infty]$ y cada A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pongamos

$$\|A\|_p := \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ \|x\|_p \leq 1}} \|Ax\|_p.$$

2. Teorema. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pongamos

$$C_1 = \sup_{j \in \{1, \dots, n\}} \sum_{k=1}^n |A_{j,k}|, \quad C_2 = \sup_{k \in \{1, \dots, n\}} \sum_{j=1}^n |A_{j,k}|.$$

Entonces

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{C_1 C_2}.$$

Idea de demostración. Aplicar la desigualdad de Cauchy–Schwarz. □