Convergencia del método iterativo de Jacobi para matrices estrictamente diagonal dominantes

Objetivos. Demostrar que el método iterativo de Jacobi converge en el caso si la matriz del sistema es estrictamente diagonal dominante por renglones.

Requisitos. Idea de solución de sistemas de ecuaciones lineales con métodos iterativos, el método iterativo de Jacobi en la forma matricial, funciones contractivas (contractantes), el teorema de Banach sobre el punto fijo, las normas matriciales asociadas a las normas vectoriales $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$, matrices estrictamente diagonal dominantes (por renglones o por columnas).

1. Método de Jacobi en forma matricial. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz con entradas diagonales no nulas:

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad A_{j,j} \neq 0.$$

Denotemos por d al vector de las entradas diagonales de la matriz A:

$$d = \left[A_{j,j}\right]_{j=1}^{n}.$$

Escribimos A en la forma

$$A = D + C,$$

donde

$$D = \operatorname{diag}(d), \qquad C = A - D.$$

Si $b \in \mathbb{R}^n$, entonces la igualdad $Ax = b$ se puede escribir en la forma

$$Dx = b - Cx,$$

o en la forma

$$x = D^{-1}b - D^{-1}Cx.$$

La fórmula iterativa es

$$x^{(s+1)} = f(x^{(s)}),$$

donde la función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ está definida como

$$f(x) \coloneqq D^{-1}b - D^{-1}Cx.$$

Estas fórmulas no son las más cómodas para los cálculos, pero son útiles para analizar la convergencia.

2. Definición de matriz estrictamente diagonal dominante por renglones (repaso). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se dice que A es *estrictamente diagonal dominante por renglones*, si en cada renglón el valor absoluto de la entrada diagonal es estrictamente mayor que la suma de los valores absolutos de las demás entradas:

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad |A_{j,j}| > \sum_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j\}} |A_{j,k}|.$$

3. Definición de matriz estrictamente diagonal dominante por columnas (repaso). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se dice que A es *estrictamente diagonal dominante por columnas*, si en cada columna el valor absoluto de la entrada diagonal es estrictamente mayor que la suma de los valores absolutos de las demás entradas:

$$\forall k \in \{1,\ldots,n\} \qquad |A_{k,k}| > \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{k\}} |A_{j,k}|.$$

4. Fórmula para calcular las normas matriciales asociadas a las normas vectoriales $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^n |A_{j,k}|, \qquad \|A\|_1 = \max_{1\le k\le n} \sum_{j=1}^n |A_{j,k}|.$$

5. Función contractiva (repaso). Sea (X,d) un espacio métrico. Una función $f\colon X \to X$ se llama *contractiva* (o *contractante*) si existe un número $L \in [0,1)$ tal que

$$\forall x,y \in X \qquad d(f(x), f(y)) \le L d(x,y).$$

Subrayamos dos detalles de esta definición: L es *estrictamente menor* que 1, el contradominio de f coincide con su dominio (por lo tanto, la imagen de f es un subconjunto de su dominio).

6. Teorema de Banach sobre el punto fijo de una función contractiva (repaso). Sean (X,d) un espacio métrico completo y $f\colon X\to X$ una función contractiva. Entonces existe un único punto $p \in X$ tal que $f(p) = p$. Más aún, si x_0 un punto de X, entonces la sucesión $(x_s)_{s=0}^\infty$ definida mediante la fórmula recursiva

$$x_{s+1} = f(x_s),$$

converge al punto p.

7. Teorema (convergencia del método de Jacobi para matrices estrictamente diagonal dominantes por renglones). Supongamos que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es estrictamente diagonal dominante por renglones. Definimos $D = \operatorname{diag}(A_{1,1},\ldots,A_{n,n})$, $C = A - D$. Entonces la función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida como

$$f(x) \coloneqq D^{-1}b - D^{-1}Cx,$$

es contractiva con respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$, y por eso el método de Jacobi converge para cualquier vector inicial $x^{(0)}$.

Demostración. Para cada $j \in \{1,\ldots,n\}$

$$\sum_{k=1}^n |(D^{-1}C)_{j,k}| = \frac{1}{|A_{j,j}|} \sum_{k\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{j\}} |A_{j,k}| < 1,$$

y la norma $\|\cdot\|_\infty$ de la matriz $D^{-1}C$ es estrictamente menor que 1:

$$L \coloneqq \|D^{-1}C\|_\infty = \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{n} |(D^{-1}C)_{j,k}| < 1.$$

Ahora

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty = \|D^{-1}C(y-x)\|_\infty \le \|D^{-1}C\|_\infty \, \|y-x\|_\infty \le L\, \|x-y\|_\infty.$$

Por el teorema de Banach del punto fijo, para cualquier punto inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ la sucesión $(x^{(s)})_{s=0}^{\infty}$ definida mediante la fórmula recursiva

$$x^{(s+1)} = f(x^{(s)}),$$

converge al punto fijo de f, esto es, a la solución del sistema $Ax = b$. $\square$

Ahora consideremos el caso cuando A es estrictamente diagonal dominante por columnas. En este caso la demostración de la convergencia es más complicada. Necesitamos varios lemas.

8. Lema (sobre la norma definida por medio de una matriz). Sea $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible. Definimos $\nu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$\nu(x) \coloneqq \|Dx\|_1.$$

Entonces ν es una norma en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. La propiedad subaditiva y la propiedad homogenea absoluta se siguien de las propiedades correspondientes de la norma $\|\cdot\|_1$ aplicando las propiedades distributiva y homogenea de la multiplicación de matrices:

$$\begin{aligned}\nu(x+y) &= \|D(x+y)\|_1 = \|Dx + Dy\|_1 \le \|Dx\|_1 + \|Dy\|_1 = \nu(x) + \nu(y),\\ \nu(\lambda x) &= \|D(\lambda x)\|_1 = \|\lambda Dx\|_1 = |\lambda|\, \|Dx\|_1 = |\lambda|\, \nu(x).\end{aligned}$$

Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$, entonces de la hipótesis que D es invertible se sigue que $Dx \ne \mathbf{0}_n$, y por lo tanto

$$\nu(x) = \|Dx\|_1 > 0.$$ $\square$

9. Lema (fórmula para calcular la norma matricial asociada a la norma vectorial definida por medio de una matriz). Sea $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible. Definimos $\nu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$\nu(x) \coloneqq \|Dx\|_1.$$

Entonces la norma matricial correspondiente se calcular por la regla

$$\nu_{\mathrm{matr}}(A) = \|DAD^{-1}\|_{\mathrm{matr},1}.$$

Demostración. Empezamos con la definición de la norma matricial:

$$\nu_{\mathrm{matr}}(A) = \sup_{x \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}_n\}} \frac{\nu(Ax)}{\nu(x)} = \sup_{x \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}_n\}} \frac{\|DAx\|_1}{\|Dx\|_1}.$$

Hagamos el cambio de variable $y = Dx$. Como la matriz D es invertible, el operador lineal asociado a la matriz D es un isomorfismo lineal. Por lo tanto, cuando el vector x recorre el conjunto $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_n\}$, el vector y recorre el mismo conjunto.

$$\nu_{\mathrm{matr}}(A) = \sup_{y \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}_n\}} \frac{\|DAD^{-1}y\|_1}{\|y\|_1} = \|DAD^{-1}\|_{\mathrm{matr},1}. \qquad \square$$

10. Teorema (convergencia del método de Jacobi para matrices estrictamente diagonal dominantes por columnas). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ estrictamente diagonal dominante por columnas. Definimos $D = \operatorname{diag}(A_{1,1}, \ldots, A_{n,n})$, $C = A - D$. Entonces la función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida como

$$f(x) \coloneqq D^{-1}b - D^{-1}Cx,$$

es contractiva con respecto a la norma $\nu(x) \coloneqq \|Dx\|_1$, y por eso el método de Jacobi converge para cualquier vector inicial $x^{(0)}$.

Demostración. Como A es estrictamente diagonal dominante por columnas, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} |(CD^{-1})_{j,k}| = \frac{1}{|A_{k,k}|} \sum_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{k\}} |A_{j,k}| < 1,$$

y la norma $\|\cdot\|_{\mathrm{matr},1}$ de la matriz CD^{-1} es estrictamente menor que 1:

$$L \coloneqq \|CD^{-1}\|_{\mathrm{matr},1} = \max_{1 \le k \le n} \sum_{j=1}^{n} |(CD^{-1})_{j,k}| < 1.$$

Ahora, por el Lema 9,

$$\nu_{\mathrm{matr}}(D^{-1}C) = \|CD^{-1}\|_{\mathrm{matr},1} = L < 1.$$

Por lo tanto

$$\nu(f(x) - f(y)) = \nu(D^{-1}C(y - x)) \le \nu_{\mathrm{matr}}(D^{-1}C)\, \nu(y - x) \le L\, \nu(x - y),$$

así que la función f es contractiva con respecto a la norma ν. $\square$