Programación: Sistemas triangulares superiores

Autores de los apuntes: Egor Maximenko, Maria de los Angeles Isidro Pérez.

Objetivos. Programar el método de la *sustitución hacia atrás* para resolver sistemas de ecuaciones lineales con matrices triangulares superiores.

Requisitos. Matrices triangulares, notación breve para las sumas, experiencia de programación, solución de sistemas de ecauciones lineales con matrices triangulares inferiores.

1. Ejemplo. Resolver el siguiente sistema triangular superior de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & = & -4; \\ & & 5x_2 & + & 4x_3 & & & = & 3; \\ & & & & 4x_3 & + & x_4 & = & 5; \\ & & & & & - & 2x_4 & = & 6. \end{array}\right.$$

Solución. De la última (cuarta) ecuación despejamos x_4, luego de la tercera ecuación despejamos x_3 y sustituimos el valor de x_4, etc.:

$$x_4 = \frac{6}{-2} = \underbrace{\qquad}_{?};$$

$$x_3 = \frac{5 - x_4}{4} = \frac{\qquad\qquad}{4} = \underbrace{\qquad}_{?};$$

$$x_2 = \frac{3 - (\qquad\qquad\qquad)}{\qquad} = \frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{\qquad} = \underbrace{\qquad}_{?};$$

$$x_1 = \frac{-4 - (\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)}{\qquad} = \frac{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}{\qquad} = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ 0+0+0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ 6 \end{bmatrix}. \qquad \checkmark$$

$\square$

Notación breve para las sumas (repaso)

Se supone que el estudiante ya ha resuelto los ejercicios del tema "Programación: Sistemas triangulares inferiores", por eso aquí se proponen ejemplos más complicados.

2. Ejemplos.

$$\sum_{k=3}^{6} C_{4,k} = \underset{\text{con } k=3}{C_{4,k}} + \underset{\text{con } k=4}{C_{4,k}} + \underset{\text{con } k=5}{C_{4,k}} + \underset{\text{con } k=6}{C_{4,k}} = C_{4,3} + C_{4,4} + C_{4,5} + C_{4,6}.$$

$$\sum_{j=1}^{4} A_{2,j} =$$

$$\sum_{j=2}^{4} B_{j,1} =$$

$$\sum_{q=3}^{5} M_{p,q} = M_{p,3} + M_{p,4} + M_{p,5}.$$

$$\sum_{k=2}^{6} N_{k,j} =$$

3. Ejemplos: escribir con $\sum$.

$$C_{6,4} + C_{7,4} + C_{8,4} + C_{9,4} = \sum_{q=6}^{9} C_{q,4}.$$

$$A_{5,2} + A_{5,3} + A_{5,4} = \sum_{j=} \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

$$B_{p,1}y_1 + B_{p,2}y_2 + B_{p,3}y_3 + B_{p,4}y_4 = \sum_{k=} \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

4. Convenio: la suma de un conjunto vacío de sumandos es cero.

$$\sum_{k=1}^{0} b_k = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ 1\le k\le 0}} b_k = \sum_{k\in\emptyset} b_k = 0.$$

Fórmulas generales de la sustitución hacia adelante (se recomienda deducirlas antes de la clase práctica)

5. Fórmulas para $n = 4$. Consideremos un sistema de ecuaciones de la forma $Ux = b$, donde $U \in \mathrm{UT}_4(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^4$. La condición $U \in \mathrm{UT}_4(\mathbb{R})$ significa que U es una matriz real 4×4 triangular superior con entradas no nulas en la diagonal principal.

$$\begin{cases} \begin{array}{ccccccccc} U_{1,1}x_1 & + & U_{1,2}x_2 & + & U_{1,3}x_3 & + & U_{1,4}x_4 & = & b_1; \\ & & U_{2,2}x_2 & + & U_{2,3}x_3 & + & U_{2,4}x_4 & = & b_2; \\ & & & + & U_{3,3}x_3 & & U_{3,4}x_4 & = & b_3; \\ & & & & & & U_{4,4}x_4 & = & b_4. \end{array} \end{cases}$$

De la cuarta ecuación despejamos la incógnita x_4. De la tercera ecuación despejamos x_3 (expresamos x_3 a través de x_4). De la segunda ecuación despejamos la incógnita x_2 (la expresamos en términos de x_3 y x_4). De la primera ecuación despejamos x_1.

$$x_4 = \underbrace{\qquad}_{?} \ / \ \underbrace{\qquad}_{?} \ .$$

$$x_3 =$$

$$x_2 = \Bigg(\underbrace{\qquad}_{?} - \Big(\underbrace{\qquad\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \Big) \Bigg) / \underbrace{\qquad}_{?} = \Bigg(\qquad - \sum_{j=} \qquad\qquad \Bigg) / \qquad .$$

$$x_1 =$$

6. Fórmulas generales de la sustitución hacia atrás. Generalice las fórmulas del ejercicio anterior. Sea U una matriz triangular superior $n \times n$ con entradas diagonales no nulas y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Escriba una fórmula para calcular x_i. **Piense muy bien en los límites de la sumatoria.**

$$x_i = \left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \right) / \qquad\qquad .$$

7. Suma sobre el conjunto vacío (repaso). Por definición, cualquier suma sobre un conjunto vacío es cero. Por ejemplo,

$$\sum_{i=4}^{3} a_i = \sum_{i \in \mathbb{Z}:\ 4 \le i \le 3} a_i = \sum_{i \in \emptyset} a_i = 0.$$

Determine si la fórmula del ejercicio anterior para calcular x_i es válida para $i = n$ o no.

Programación de la sustitución hacia adelante

8. Ciclos ascedentes y descedentes. Recuerde cómo escribir "ciclos ascedentes" y "ciclos descedentes" en el lenguaje de programación que está usando. En Wolfram Mathematica puede probar los siguientes comandos:

```
For[j = 3, j <= 11, j++, Print[j]]

Do[Print[j], {j, 3, 11}]

For[j = 11, j >= 3, j--, Print[j]]

Do[Print[j], {j, 11, 3, -1}
```

9. Sumatorias (repaso).

```
a = {1, 2, 4, 8, 16}

Sum[a[[k]], {k, 2, 4}]

a = Table[Max[i, j], {i, 4}, {j, 4}]; a // MatrixForm

Do[Print[a[[k, 3]]], {k, 2, 4}]

Sum[a[[k, 3]], {k, 2, 4}]
```

10. Problema SolveUT (2 %). Escriba una función SolveUT que resuelva el sistema de ecuaciones lineales $Ux = b$.

Entrada: una matriz U y un vector b; se supone que U es cuadrada y **triangular superior**, con entradas diagonales no nulas, y que la longitud de b coincide con el orden de U.

Salida: un vector x tal que $Ux = b$.

11. Comprobación. Compruebe la función `SolveUT` usando los siguientes datos:

$$U = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

```
U = ...

b = ...

x = SolveUT[U, b]

U . x
```

(*este producto debe coincidir con* b)