Programación: Métodos iterativos de Jacobi y de Gauss–Seidel

Objetivos. Programar los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

1. Idea de los métodos iterativos. Se considera un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$. En ambos métodos se construye una sucesión de vectores $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $\ldots$, que bajo ciertas condiciones converge a la solución exacta del sistema.

2. Terminar el proceso si llegamos a un punto fijo. Terminar el proceso iterativo si $\|x-y\|_2 < \varepsilon$, donde ε es un número dado, x es el vector obtenido en la última iteración, y es el vector obtenido en la iteración anterior y $\|\cdot\|_2$ es la norma euclideana. Vamos a denotar $\|x-y\|_2$ por d.

3. Número máximo de iteraciones. En algunas situaciones los métodos iterativos no convergen. Por eso desde el inicio elegimos el número máximo de iteraciones $pmax$, en una variable p contamos el número de las iteraciones realizadas y salimos del ciclo si $p >= pmax$.

4. Condición de terminación y condición de continuación. Vamos a terminar el ciclo si la solución actual es muy cercana a la solución encontrada en el paso anterior o si el número de iteraciones hechas es mayor o igual al número máximo de iteraciones:

$$\text{Condición de terminación:} \qquad (d < eps) \qquad \vee \qquad (p \geq pmax).$$

La condición de continuación del ciclo obtenemos como la negación de la condición de terminación:

$$\text{Condición de continuación:} \qquad \underbrace{\hspace{3cm}}_{?} \qquad \wedge \qquad \underbrace{\hspace{3cm}}_{?}\,.$$

5. Estructura del algoritmo para métodos iterativos.

```
Entrada: A, b, eps, pmax.
Variables locales: ... .
n := longitud de b;
x := vector nulo de longitud n;
d := 2 * eps;
p := ...;
Mientras ...:
    y := x;
    ... (construir x nuevo) ...
    d := norma del vector (x - y);
    p += 1;
Salida: x, p.
```

Fórmula del método de Jacobi. En cada paso las componentes del vector nuevo x se calculan a través del vector anterior z mediante las siguientes fórmulas:

$$x_i := \frac{1}{A_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j}\, y_j - \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j}\, y_j \right).$$

6. Problema SyslineqJacobi (2 %). Entradas: A, b, eps, $pmax$, donde A es una matriz cuadrada de orden n, b es un vector de longitud n. Salida: vector x y número de iteraciones realizadas p.

Fórmula del método de Gauss–Seidel.

$$x_i := \frac{1}{A_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j}\, x_j - \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j}\, y_j \right).$$

7. Problema SyslineqGaussSeidel (1 %). Entradas: A, b, eps, $pmax$, donde A es una matriz cuadrada de orden n, b es un vector de longitud n. Salida: vector x y número de iteraciones realizadas p.

8. Comprobación. Aplique los métodos de Jacobi y de Gauss–Seidel al siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Compare el número iteraciones en estos dos métodos aplicados al mismo sistema y con el mismo $eps = 0.001$.