Programación: Multiplicación de polinomios

Tarea optativa

Objetivos. Escribir una función que multiplique dos polinomios. Los polinomios se representan como listas de sus coeficientes.

Requisitos. Ciclos de tipo `for`, sumas.

Preliminares teóricos (se recomienda hacerlos antes de la clase)

1. Fórmulas para los coeficientes del producto de los polinomios, un ejemplo. Sean

$$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3,$$
$$g(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2.$$

Denotemos por c_k los coeficientes del producto $h(x) = f(x)g(x)$:

$$h(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4 + c_6 x^5.$$

Exprese los coeficientes de h a través de los coeficientes de f y g:

$$c_1 =$$

$$c_2 =$$

$$c_3 =$$

$$c_4 =$$

$$c_5 =$$

$$c_6 =$$

2. En los sumandos $a_i b_j$ que forman el coeficiente c_3 del ejercicio anterior, ¿cuál es la relación entre i y j?

$$i + j =$$

En general, ¿cuál es la relación entre i y j en los sumandos $a_i b_j$ que forman c_k?

$$i + j =$$

Fórmula general escita de manera abstracta. Sean $f(x)$ y $g(x)$ polinomios de grados m y n respectivamente:

$$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_{m+1} x^m,$$
$$g(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \ldots + b_{n+1} x^n.$$

Entonces

$$c_k = \sum_{\substack{i,j:\\ i+j=k+1\\ 1\le i\le m+1\\ 1\le j\le n+1}} a_i b_j.$$

Sustituyendo j por $k+1-i$ uno puede escribir la suma con una variable i:

$$c_k = \sum_{i=?}^{?} a_i b_{k+1-i}.$$

Vamos a determinar los límites de la variación de i.

3. Si $j = k+1-i$, ¿cómo se escriben las desigulddades $j \ge 1$ y $j \le n+1$ en términos de la variable i?

$$j \ge 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad i \le$$

$$j \le n+1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad i \ge$$

4. Entrenamiento: simplificar sistemas de desigualdades simples. Simplifique los siguientes sistemas de desigualdades:

$$\begin{cases} i \ge 2; \\ i \ge 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \quad i \ge \underbrace{\qquad}_{?} \qquad\qquad \begin{cases} i \le 8; \\ i \le 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \quad i \le \underbrace{\qquad}_{?}$$

$$\begin{cases} i \ge a; \\ i \ge b \end{cases} \Longleftrightarrow \quad i \ge \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \qquad\qquad \begin{cases} i \le a; \\ i \le b \end{cases} \Longleftrightarrow \quad i \le \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

5. Límites de la variación de i. Tomando en cuenta que $j = k+1-i$ escriba todas las desigualdades en términos de la variable i y simplifique el sistema obtenido:

$$\begin{cases} i \ge 1 \\ i \le m+1 \\ j \ge 1 \\ j \le n+1 \end{cases} \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} i \ge 1 \\ i \le m+1 \\ i \le \\ i \ge \end{cases} \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} i \ge \\ i \le \end{cases}$$

6. Escriba los límites de la variación de i en la fórmula general para los coeficientes del producto de dos polinomios:

$$c_k = \sum_{\underbrace{i=\qquad}_{?}}^{\overbrace{\qquad}^{?}} a_i b_{k+1-i}.$$

7. Problema PolProduct. Escriba una función que calcule la lista de los coeficientes del producto de dos polinomios dados por sus listas de los coeficientes.

```
Entrada: a, b (listas de los coeficientes de los polinomios f(x) y g(x));
Variables locales: m, n, p, i, k, c;
// Calculemos los grados de los polinomios f(x), g(x) y f(x)g(x):
m := (longitud de a) - 1;
n := ...
p := ...
c := lista nula de longitud ...
Para k := 1, ..., p + 1:
    imin := ...
    imax := ...
    c[k] se calcula como la suma de las expresiones ...........
         donde i corre de imin a imax;
Regresar: c.
```

8. Comprobación. Es fácil ver que

$$(2 - 3x + 5x^2)(3 + 4x - x^2 + 7x^3) = 6 - x + x^2 + 37x^3 - 26x^4 + 35x^5.$$

Por lo tanto la función `PolProduct` aplicada a las listas $2, -3, 5$ y $3, 4, -1, 7$ debe regresar la lista $6, -1, 1, 37, -26, 35$.