Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

Problemas para examen

Antes de resolver un problema en el caso general, se recomienda considerar casos particulares (por ejemplo, $n = 4$ y $n = 50$). En el caso de algoritmos, se recomienda hacer una comprobación escribiendo todas las operaciones del algoritmo para el caso de matrices de tamaño 3.

Operaciones con matrices

1. Definición del producto de una matriz por un vector. Escriba la definición del producto de una matriz A por un vector b. Hay que especificar los tamaños y la fórmula para la i-ésima componente del producto, esto es, $(Ab)_i$.

2. Algoritmo de multiplicación de una matriz por un vector. Escriba el algoritmo que calcule el producto de una matriz A de tamaño $m \times n$ por un vector b de longitud n. Calcule el número de las operaciones de multiplicación y el número de las operaciones de adición.

3. Definición del producto de dos matrices. Escriba la definición del producto de dos matrices. Hay que especificar los tamaños y la fórmula para la (i, j)-ésima entrada del producto, esto es, $(AB)_{i,j}$.

4. Algoritmo de multiplicación de dos matrices. Escriba el algoritmo que calcule el producto de dos matrices A y B. Calcule el número de multiplicaciones y el número de adiciones en este algoritmo.

5. Definición de la matriz transpuesta. Escriba la definición de la matriz $A^\top$, donde A es una matriz general. Hay que especificar los tamaños y la fórmula para la entrada (i, j) de la matriz $A^\top$:

$$\left(A^\top\right)_{i,j} = ?.$$

6. Algoritmo de construcción de la matriz transpuesta. Escriba el algoritmo que construya la matriz $A^\top$ para cualquier matriz dada A.

Matrices triangulares y sus productos

7. Definiciones de matrices triangulares superiores, inferiores y unitriangulares inferiores. Escriba las definiciones indicadas de manera formal, con cuantificadores.

$$\operatorname{ut}_n(\mathbb{R}) \coloneqq \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}): \quad \forall i,j \in \{1,\ldots,n\} \quad \Big(\underbrace{\qquad\qquad}_{?} \Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(A_{i,j} = 0 \Big) \right\}.$$

8. Algoritmo de multiplicación de una matriz triangular superior por un vector. Escriba el algoritmo que calcule el producto de una matriz triangular superior de tamaño $n \times n$ por un vector de longitud n. Hay que utilizar bien la hipótesis que la matriz es triangular superior. Calcule el número de las operaciones de multiplicación y el número de las operaciones de adición.

9. Algoritmo de multiplicación de una matriz triangular inferior por un vector. Escriba el algoritmo que calcule el producto de una matriz triangular inferior de tamaño $n \times n$ por un vector de longitud n. Hay que utilizar bien la hipótesis que la matriz es triangular inferior. Calcule el número de las operaciones de multiplicación y el número de las operaciones de adición.

10. El producto de dos matrices triangulares superiores también es triangular superior. Sean A y B matrices triangulares superiores de orden n. Demuestre que su producto AB también es una matriz triangular superior.

11. Fórmula para las entradas del producto de dos matrices triangulares superiores. Sean A y B matrices triangulares superiores de orden n. Escriba la fórmula para $(AB)_{i,j}$, donde $i \le j$. Indicación: use la definición del producto de dos matrices y omita los sumandos sobre los cuales se sabe que son cero.

12. Algoritmo para multiplicar matrices triangulares superiores. Escriba un algoritmo que calcule el producto de dos matrices triangulares superiores A y B del mismo orden n. Utilice los resultados de los Problemas 10 y 11, esto es, trabaje solamente con las entradas que están en la diagonal principal y por arriba de la diagonal principal. Calcule el número de las operaciones de multiplicación y el número de las operaciones de adición.

13. Fórmula para las entradas diagonales del producto de dos matrices triangulares superiores. Sean A y B matrices triangulares superiores de orden n. Demuestre que las entradas diagonales de su producto AB son productos de las entradas correspondientes de A y B:

$$(AB)_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}.$$

14. El producto de dos matrices triangulares inferiores también es triangular inferior. Sean A y B matrices triangulares inferiores de orden n. Demuestre que su producto AB también es una matriz triangular inferior.

15. Fórmula para las entradas del producto de dos matrices triangulares inferiores. Sean A y B matrices triangulares inferiores de orden n. Escriba la fórmula para $(AB)_{i,j}$, donde $i \geq j$. Indicación: use la definición del producto de dos matrices y omita los sumandos sobre los cuales se sabe que son cero.

16. Algoritmo para multiplicar matrices triangulares inferiores. Escriba un algoritmo que calcule el producto de dos matrices triangulares inferiores A y B del mismo orden n. Utilice los resultados de los Problemas 14 y 15, esto es, trabaje solamente con las entradas que están en la diagonal principal y por debajo de la diagonal principal. Calcule el número de las operaciones de multiplicación y el número de las operaciones de adición.

17. Entradas diagonales del producto de dos matrices triangulares inferiores. Sean A y B matrices triangulares inferiores de orden n. Demuestre que las entradas diagonales de su producto AB son productos de las entradas correspondientes de A y B:

$$(AB)_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}.$$

18. El producto de dos matrices unitriangulares inferiores tambiés es unitriangular inferior. Sean A y B matrices unitriangulares inferiores de orden n, esto es, triangulares inferiores con las entradas diagonales iguales a 1.

Solución de sistemas de ecuaciones lineales con matrices triangulares

19. Escriba el algoritmo de la sustitución hacia adelante que se usa para resolver un sistema de ecuaciones lineales $Lx = b$, donde L es una matriz triangular inferior de orden n con elementos diagonales no nulos y b es un vector de longitud n. Calcule el número de las operaciones de multiplicación y división, también el número de las operaciones de adición y sustracción.

20. Escriba el algoritmo de la sustitución hacia atrás que se usa para resolver un sistema de ecuaciones lineales $Ux = b$, donde U es una matriz triangular superior de orden n con elementos diagonales no nulos y b es un vector de longitud n. Calcule el número de las operaciones de multiplicación y división, también el número de las operaciones de adición y sustracción.

Operaciones elementales y matrices elementales

21. Matrices elementales y sus inversas. Escriba ejemplos de tres tipos de matrices elementales; para cada una de estas matrices escriba su inversa. Se recomienda usar alguna notación para cada tipo de matrices elementales, por ejemplo,

$$E_{+}(q, p, \lambda), \qquad E_{*}(p, \lambda), \qquad E_{\leftrightarrow}(p, q).$$

22. Descomposición de una matriz y de su inversa en productos de matrices elementales. Sea A una matriz cuadrada y sean $E_1, E_2, \ldots, E_k$ algunos matrices elementales tales que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I_n.$$

Escriba la descomposición de la matriz A^{-1} en un producto de matrices elementales. Escriba la descomposición de la matriz A en un producto de matrices elementales.

Invertibilidad y las inversas de matrices triangulares

23. Invertibilidad de matrices triangulares superiores. Sea U una matriz triangular superior de orden n. Muestre que U es invertible si y sólo si todas las entradas diagonales de U son no nulas. Sugerencia: use la teoría de determinantes.

24. Invertibilidad de matrices triangulares inferiores. Sea L una matriz triangular inferior de orden n. Muestre que L es invertible si y sólo si todas las entradas diagonales de L son no nulas. Sugerencia: use la teoría de determinantes.

25. Reducción de una matriz unitriangular inferior. Escriba las operaciones elementales que transformen una matriz unitriangular inferior L de orden 4 en la matriz identidad I_4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_{2,1} & 1 & 0 & 0 \\ L_{3,1} & L_{3,2} & 1 & 0 \\ L_{4,1} & L_{4,2} & L_{4,3} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_? += ?R_?]{\substack{R_? += ?R_? \\ R_? += ?R_?}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ? & 1 & 0 \\ 0 & ? & ? & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_? += ?R_? \\ R_? += ?R_?}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ? & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_? += ?R_?} I_4.$$

Generalice este procedimiento al caso de matrices $n \times n$.

26. Reducción de una matriz triangular superior. Sea U una matriz cuadrada triangular superior con entradas diagonales no nulas. Muestre que U se puede transformar en la matriz identidad aplicando ciertas operaciones elementales. Describa de manera precisa qué operaciones elementales hay que aplicar.

27. La inversa de una matriz unitriangular inferior también es unitriangular inferior. Sea L una matriz unitriangular inferior. Demuestre que la matriz L^{-1} también es unitriangular inferior. Sugerencia: usar los razonamientos del Problema 25.

28. La inversa de una matriz triangular inferior también es triangular inferior. Sea L una matriz cuadrada triangular inferior con entradas diagonales no nulas. Demuestre que la matriz L^{-1} también es triangular inferior.

29. La inversa de una matriz triangular superior tambiés es triangular superior. Sea U una matriz cuadrada triangular superior con entradas diagonales no nulas. Demuestre que la matriz U^{-1} también es triangular superior. Sugerencia: usar el problema anterior y representar U^{-1} como un producto de matrices elementales.

Factorización LU

30. Intersección de la clase de matrices unitriangulares inferiores con la clase de matrices triangulares superiores. Sea B una matriz cuadrada de orden n que al mismo tiempo es triangular superior y unitriangular inferior. Determine qué forma debe tener la matriz B.

31. Unicidad de la factorización LU. Sea A una matriz cuadrada invertible que posee una factorización LU. Demuestre que su factorización LU es única. Sugerencia: suponga que (L_1, U_1) y (L_2, U_2) son dos factorizaciones LU de la matriz A, luego aplique los resultados de problemas anteriores.

Matrices de permutación

Se denota por S_n el conjunto de las permutaciones del conjunto $\{1, \dots, n\}$.

32. Propiedades principal del símbolo de Kronecker.
Sean $a_1, \dots, a_n$ algunos números y sea $j \in \{1, \dots, n\}$. Demuestre que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{k,j} = a_j.$$

33. Permutación de sumandos en una sumatoria.
Sea $\varphi \in S_n$, es decir, sea φ una permutación del conjunto $\{1, \dots, n\}$. Verifique con ejemplos la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)}.$$

34. Definición de la matriz de permutación.
Sea $\varphi \in S_n$. Escriba la fórmula para la entrada (i, i) de la matriz de permutación P_φ:

$$(P_\varphi)_{i,i} = ?.$$

35. Construcción de la matriz de permutación.
Escriba el algoritmo que construya la matriz P_φ para cualquier permutación dada φ. Por ejemplo, dada la lista de números $3, 1, 4, 2$, el algoritmo debe construir la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

36. Producto de una matriz de permutación por un vector.
Sea $\varphi \in S_n$ y sea $x \in \mathbb{R}^n$. Usando los resultados de los Problemas 1, 34 y 32 deduzca una fórmula para la i-ésima componente del vector $P_\varphi x$:

$$(P_\varphi x)_i = ?.$$

37. Algoritmo de multiplicación de una matriz de permutación por un vector. Escriba el algoritmo que calcule el vector $P_\varphi x$, sin crear la matriz P_φ. Por ejemplo, para la permutación $3, 1, 4, 2$ y el vector

$$x = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix},$$

el algoritmo debe regresar el vector

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

38. Producto de una matriz de permutación por una matriz arbitraria. Sea $\varphi \in S_n$ y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Usando los resultados de los Problemas 3, 34 y 32 demuestre que el i-ésimo renglón del producto $P_\varphi A$ coincide con el $\varphi(i)$-ésimo renglón de la matriz A:

$$(P_\varphi A)_{i,j} = A_{\varphi(i),j}.$$

39. Producto de matrices de permutaciones. Sean $\varphi, \psi \in S_n$. Usando los resultados de los Problemas 3, 34 y 32 demuestre que

$$P_\varphi P_\psi = P_{\psi\varphi}.$$

40. Producto de una matriz de permutación por su transpuesta es la identidad. Sea $\varphi \in S_n$. Usando los resultados de los Problemas 3, 34 y 32 demuestre que

$$P_\varphi^\top P_\varphi = I_n.$$

La igualdad demostrada significa que P_φ es invertible y $P_\varphi^{-1} = P_\varphi^\top$.

41. Producto de una matriz arbitraria por una matriz de permutación por la derecha. Sea $\varphi \in S_n$ y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Denotemos por ψ a la permutación inversa a φ, esto es, $\psi = \varphi^{-1}$. Demuestre que la j-ésima columna de la matriz AP_φ coincide con la $\psi(j)$-ésima columna de la matriz A:

$$(AP_\varphi)_{i,j} = A_{i,\psi(j)}.$$

Algoritmos directos para resolver sistemas de ecuaciones lineales

42. Algoritmo para resolver un sistema de ecuaciones lineales con una matriz tridiagonal. Escriba un algoritmo para resolver un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, donde A es una matriz tridiagonal de orden n y b es un vector de longitud n. Calcule el número de las operaciones de multiplicación y división, también el número de las operaciones de adición y sustracción.

43. Algoritmo de reducción de una matriz a una matriz triangular superior. Escriba el algoritmo de la eliminación de Gauss que se aplica a una matriz A de tamaño $n \times n$ y la reduce a una matriz triangular superior, usando como pivotes los elementos diagonales. Se supone que en cada paso p la entrada (p, p) es no nula. Calcule el número de las operaciones de multiplicación y división, también el número de las operaciones de adición y sustracción.

Dos algoritmos iterativos clásicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales

44. Algoritmo iterativo de Jacobi para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Escriba el algoritmo iterativo de Jacobi que se usa para resolver un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, donde A es una matriz de orden n con elementos diagonales no nulos y b es un vector de longitud n. Escriba una condición suficiente que garantiza la convergencia del algoritmo. Calcule el número de las operaciones de multiplicación y división que se usan en una iteración (es decir, en un paso) del algoritmo.

45. Algoritmo de Gauss–Seidel. Escriba el algoritmo iterativo de Gauss–Seidel que se usa para resolver un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, donde A es una matriz de orden n con elementos diagonales no nulos y b es un vector de longitud n. Escriba una condición suficiente que garantiza la convergencia del algoritmo. Calcule el número de las operaciones de multiplicación, también de adición y sustracción, que se usan en un paso del algoritmo.

Normas de vectores, normas de matrices y el número de acondicionamiento

46. Sea $a \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que

$$\|a\|_\infty \le \|a\|_2, \quad \|a\|_2 \le \|a\|_1, \quad \|a\|_2 \le \sqrt{n}\|a\|_\infty, \quad \|a\|_1 \le \sqrt{n}\,\|a\|_2.$$

47. Escriba las fórmulas para calcular las normas matriciales $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$. Calcule las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ para cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 8 \\ 3 & 9 & 4 \\ 5 & -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

48. Sean $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que

$$\|Ab\|_\infty \le C\|b\|_\infty,$$

donde

$$C = \max_{1 \le i \le 2} \sum_{j=1}^{2} |A_{i,j}|.$$

49. Se define la sucesión de matrices A_k, $k \in \{1, 2, \ldots\}$, mediante la siguiente fórmula:

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 - \frac{1}{k} \end{bmatrix}.$$

Calcule $\operatorname{cond}_\infty(A_k)$ y $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{cond}_\infty(A_k)$.