Interpolación polinomial

Problemas para examen

Los problemas de este tema se dividen en tres grupos:

- deducir o justificar ciertas fórmulas;
- aplicar varios métodos a un problema y comparar el error;
- escribir algoritmos y calcular su complejidad.

Fórmulas para los polinomios interpolantes

1. Existencia y unicidad del polinomio interpolante.
Sean $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ números diferentes por pares y sean $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ algunos números. Demuestre que existe un único polinomio P de grado $\le n-1$ tal que $P(x_k) = y_k$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$.

2. Fórmula de Lagrange para el polinomio interpolante.
Deduzca la fórmula de Lagrange para el polinomio interpolante (empiece con la fórmula para el polinomio básico de Lagrange).

3. Fórmulas recursivas del algoritmo de Neville.
Enuncie y demuestre las fórmulas recursivas para el polinomio interpolante que se utilizan en el algoritmo de Neville.

4. Fórmula de Newton para el polinomio interpolante.
Enuncie y demuestre la fórmula de Newton para el polinomio interpolante.

5. Error de la interpolación polinomial.
Enuncie y demuestre la fórmula del error en la interpolación polinomial.

6. Sistema ecuaciones para los coeficientes de la interpolación segmentaria cúbica.
Deduzca las ecuaciones que deben satisfacer los coeficientes de los polinomios que realizan la interpolación segmentaria cúbica.

Comparación de varios métodos aplicados a un problema

7. Aproximación polinomial de la función cos en el intervalo $[0, 6]$. Se considera la función $f(x) = \cos(x)$ en el intervalo $[0, 6]$. Halle cotas superiores del error para cada una de las siguientes interpolaciones:

- Interpolación polinomial de grado 6 con los nodos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
- Interpolación polinomial de grado 3 con los nodos $0, 2, 4, 6$.
- Interpolación segmentaria cúbica con los nodos $0, 3, 6$.

Algoritmos para calcular el polinomio interpolante y su complejidad

Complejidad de algunos algoritmos básicos (repaso).
Para resolver los ejercicios de esta sección se recomienda usar los siguientes hechos elementales:

- Para multiplicar un polinomio de grado g por un binomio $(x + b)$ se utilizan $g + 1$ operaciones de multiplicación.
- Para dividir un polinomio de grado g entre un número $\alpha \neq 0$ se utilizan $g + 1$ operaciones de división.

8. Algoritmo para calcular los coeficientes de un polinomio básico de Lagrange. Escriba un algoritmo para calcular los coeficientes del "polinomio básico de Lagrange". Calcule el número de las operaciones de multiplicación y división en este algoritmo.

> Entrada: números diferentes por pares $x_1, x_2, \ldots, x_n$, un índice $k \in \{1, \ldots, n\}$.
>
> Salida: coeficientes del polinomio de grado $n - 1$ que toma valor 1 en el punto x_k y toma valor 0 en los puntos x_j, $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k\}$.

9. Algoritmo para calcular el polinomio interpolante con la fórmula de Lagrange. Escriba un algoritmo para calcular los coeficientes del polinomio interpolante que tome los valores dados en los puntos dados, usando los polinomios básicos de Lagrange. Puede suponer que ya está escrita la función que que calcula los coeficientes de los polinomios básicos de Lagrange. Calcule el número de las operaciones de multiplicación y división en este algoritmo.

> Entrada: números diferentes por pares $x_1, x_2, \ldots, x_n$, números $y_1, y_2, \ldots, y_n$.
>
> Salida: coeficientes del polinomio de grado $< n$ que toma el valor y_j en el punto x_j para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

10. Algoritmo de Neville.
Escriba el algoritmo de Neville que calcula el polinomio interpolante a través de las fórmulas recursivas. Calcule el número de las operaciones de multiplicación y división en este algoritmo.

> Entrada: números diferentes por pares $x_1, x_2, \ldots, x_n$, números $y_1, y_2, \ldots, y_n$.
>
> Salida: coeficientes del polinomio de grado $< n$ que toma el valor y_j en el punto x_j para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

11. Algoritmo para calcular la tabla de las diferencias divididas.
Escriba un algoritmo para calcular la tabla de las diferencias divididas. Calcule el número de las operaciones de división en este algoritmo.

> Entrada: números diferentes por pares $x_1, x_2, \ldots, x_n$, números $y_1, y_2, \ldots, y_n$.
>
> Salida: diferencias divididas

$$d_1 = \left[\frac{y_1}{x_1}\right], \quad d_2 = \left[\frac{y_1, y_2}{x_1, x_2}\right], \quad \ldots, \quad d_n = \left[\frac{y_1, \ldots, y_n}{x_1, \ldots, x_n}\right].$$

12. Algoritmo de Newton para calcular el polinomio interpolante.
Escriba un algoritmo basado en la fórmula de Newton que calcule el polinomio interpolante. Puede suponer que ya están calculadas las diferencias divididas necesarias. Calcule el número de las operaciones de multiplicación en este algoritmo.

> Entrada: números diferentes por pares $x_1, x_2, \ldots, x_n$, números $d_1, d_2, \ldots, d_n$ que hacen el papel de las diferencias divididas.
>
> Salida: coeficientes del polinomio P que tenga las diferencias divididas dadas:

$$P[x_1] = d_1, \qquad P[x_1; x_2] = d_2, \qquad \ldots, \qquad P[x_1; \ldots; x_n] = d_n.$$