Existencia y unicidad del polinomio interpolante

1. Problema de interpolación polinomial (repaso). Dados n números $x_1, \ldots, x_n$ diferentes a pares y n números $y_1, \ldots, y_n$, encontrar un polinomio P de grado $\leq n-1$ que tome los valores y_j en los puntos x_j:

$$P(x_j) = y_j \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Las incógnitas del problema son los coeficientes $c_0, \ldots, c_{n-1}$ del polinomio P:

$$P(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1} x^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j.$$

2. Valores de polinomios en puntos dados y matrices de Vandermonde ($n = 4$). Sean $x_1, \ldots, x_4$ algunos números y sea P un polinomio de grado ≤ 3:

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3.$$

Formemos el vector de los valores de P en los puntos $x_1, \ldots, x_4$:

$$\begin{bmatrix} P(x_1) \\ P(x_2) \\ P(x_3) \\ P(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 + x_1 c_1 + x_1^2 c_2 + x_1^3 c_3 \\ c_0 + x_2 c_1 + x_2^2 c_2 + x_2^3 c_3 \\ c_0 + x_3 c_1 + x_3^2 c_2 + x_3^3 c_3 \\ c_0 + x_4 c_1 + x_4^2 c_2 + x_4^3 c_3 \end{bmatrix}.$$

Se ve que este vector se escribe como el producto de una matriz por el vector de los coeficientes del polinomio:

$$\begin{bmatrix} P(x_1) \\ P(x_2) \\ P(x_3) \\ P(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz se llama la *matriz de Vandermonde* asociada a los puntos $x_1, \ldots, x_4$:

$$V(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \end{bmatrix}.$$

3. Definición (matriz de Vandermonde). Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números. La *matriz de Vandermonde* asociada a estos números se define como

$$V(x_1, \ldots, x_n) \coloneqq \left[x_j^{k-1}\right]_{j,k=1}^{n}.$$

En otras palabras, $V(x_1, \ldots, x_n)$ es una matriz $n \times n$, y su entrada (j, k) es

$$V(x_1, \ldots, x_n)_{j,k} = x_j^{k-1}.$$

Por ejemplo,

$$V(x_1, x_2, x_3) = \left[\begin{array}{c|c|c} \overset{j=1,\ k=1}{x_1^0} & \overset{j=1,\ k=2}{x_1^1} & \overset{j=1,\ k=3}{x_1^2} \\ \hline \overset{j=2,\ k=1}{x_2^0} & \overset{j=2,\ k=2}{x_2^1} & \overset{j=2,\ k=3}{x_2^2} \\ \hline \overset{j=3,\ k=1}{x_3^0} & \overset{j=3,\ k=2}{x_3^1} & \overset{j=3,\ k=3}{x_3^2} \end{array}\right].$$

4. Evaluación de un polinomio en puntos dados por medio de una matriz de Vandermonde. Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números y sea P un polinomio de grado $n-1$:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k.$$

Entonces el vector de los valores de P en los puntos $x_1, \ldots, x_n$ se escribe como el siguiente producto:

$$\left[P(x_j)\right]_{j=1}^{n} = V(x_1, \ldots, x_n)\left[c_{k-1}\right]_{k=1}^{n}.$$

En efecto, la componente j del vector en el lado derecho es

$$\sum_{k=1}^{n} V(x_1, \ldots, x_n)_{j,k} c_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} x_j^{k-1} = P(x_j).$$

5. Fórmula para los determinantes de Vandermonde. En el caso de órdenes 2 y 3,

$$\det V(x_1, x_2) = x_2 - x_1, \qquad \det V(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

En general,

$$\det V(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le j < k \le n} (x_k - x_j).$$

Hay varias maneras de demostrar esta fórmula; por ejemplo, por inducción, expresando $\det V(x_1, \ldots, x_n)$ a través de $\det V(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

6. Teorema (existencia y unicidad del polinomio interpolante). Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números diferentes por pares y sean $y_1, \ldots, y_n$ algunos números. Entonces existe un único polinomio P de grado $\le n-1$ tal que $P(x_j) = y_j$ para cada j en $\{1, \ldots, n\}$.

Demostración. Denotemos por $c_0, \ldots, c_{n-1}$ a los coeficientes del polinomio p:

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x_0^2 + \ldots + c_{n-1} x^{n-1}.$$

Sustituyendo $x = x_1$, luego $x = x_2$, etc., hasta $x = x_n$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales para las incógnitas $c_0, \ldots, c_{n-1}$:

$$\begin{cases} c_0 \;+\; x_1 c_1 \;+\; x_1^2 c_2 \;+\; \ldots \;+\; x_1^{n-1} c_{n-1} \;=\; y_1; \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0 \;+\; x_n c_1 \;+\; x_n^2 c_2 \;+\; \ldots \;+\; x_n^{n-1} c_{n-1} \;=\; y_n. \end{cases}$$

La matriz de este sistema es la matriz de Vandermonde asociada a los puntos $x_1, \ldots, x_n$, y el sistema se escribe brevemente en la forma

$$V(x_1, \ldots, x_n) c = y,$$

donde $c = \left[c_{k-1}\right]_{k=1}^{n}$ es el vector de los coeficientes incógnitos. El determinante de este sistema es el determinante de Vandermonde y se calcula como el producto de todas las diferencias $x_j - x_i$ con $i < j$:

$$\det V(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{\substack{j,k \in \{1,\ldots,n\} \\ j<k}} (x_k - x_j).$$

Como los puntos $x_1, \ldots, x_n$ son diferentes por pares, todas estas diferencias $x_k - x_j$ son distintas de cero, y el determinante es distinto de cero. Por lo tanto el sistema de ecuaciones lineales tiene una solución única, esto es, existe un único polinomio que cumple con dichas propiedades. $\square$

7. Representaciones cómodas del polinomio interpolante. El teorema que acabamos de demostrar garantiza que el polinomio interpolante existe y es único. En las siguientes clases vamos a estudiar algunas representaciones cómodas de este polinomio:

- Fórmula de Lagrange. Es muy útil para la teoría, en particular, para acotar el error $|f(x) - p(x)|$, donde f es una función suficientemente suave y p es un polinomio que coincide con f en algunos puntos dados $x_0, \ldots, x_n$.
- Fórmulas recursivas de Neville.
- Fórmula de Newton para construir el polinomio interpolante a través de las diferencias divididas. Esta forma es muy cómoda para los cálculos.