Demostración de la existencia y unicidad del polinomio interpolante, con ayuda de determinantes de Vandermonde

Egor Maximenko
http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

29 de diciembre de 2014

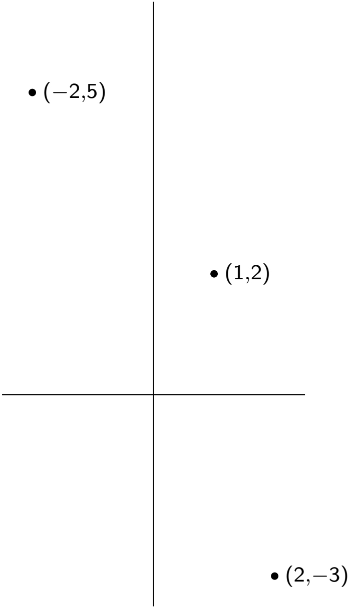
Contenido

Reducción del problema a un sistema lineal

Determinantes de Vandermonde

Existencia y unicidad del polinomio interpolante

Ejemplo



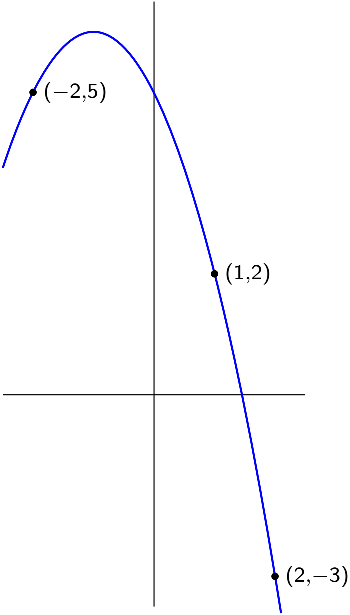
Se busca un polinomio P de grado ≤ 2 tal que

$$P(-2) = 5,$$

$$P(1) = 2,$$

$$P(2) = -3.$$

Ejemplo



Se busca un polinomio P de grado ≤ 2 tal que

$$P(-2) = 5,$$

$$P(1) = 2,$$

$$P(2) = -3.$$

En este ejemplo, la respuesta es el siguiente polinomio de grado 2:

$$P(x) = 5 - 2x - x^2.$$

Reducción a un sistema de ecuaciones lineales

Trabajamos con el mismo ejemplo

Se busca un polinomio P
de grado ≤ 2 tal que

$$\begin{aligned} P(-2) &= 5 \\ P(1) &= 2 \\ P(2) &= -3 \end{aligned}$$

Reducción a un sistema de ecuaciones lineales

Trabajamos con el mismo ejemplo

Se busca un polinomio P de grado ≤ 2 tal que

Buscamos P en la forma $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$.

$$\begin{aligned} P(-2) &= 5 \\ P(1) &= 2 \\ P(2) &= -3 \end{aligned}$$

Reducción a un sistema de ecuaciones lineales

Trabajamos con el mismo ejemplo

Se busca un polinomio P de grado ≤ 2 tal que

Buscamos P en la forma $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$.

$$\begin{aligned} P(-2) &= 5 \\ P(1) &= 2 \\ P(2) &= -3 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad c_0 + (-2)c_1 + (-2)^2 c_2 = 5,$$

Reducción a un sistema de ecuaciones lineales

Trabajamos con el mismo ejemplo

Se busca un polinomio P de grado ≤ 2 tal que

Buscamos P en la forma $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$.

$$\begin{array}{rcr} P(-2) & = & 5 \\ P(1) & = & 2 \\ P(2) & = & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \\ \ \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} c_0 & + & (-2)c_1 & + & (-2)^2 c_2 & = & 5, \\ c_0 & + & 1c_1 & + & 1^2 c_2 & = & 2, \\ & & & & & & \end{array}$$

Reducción a un sistema de ecuaciones lineales

Trabajamos con el mismo ejemplo

Se busca un polinomio P de grado ≤ 2 tal que

Buscamos P en la forma $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
P(-2) & = & 5 & \iff & c_0 & + & (-2)c_1 & + & (-2)^2 c_2 & = & 5, \\
P(1) & = & 2 & \iff & c_0 & + & 1c_1 & + & 1^2 c_2 & = & 2, \\
P(2) & = & -3 & \iff & c_0 & + & 2c_1 & + & 2^2 c_2 & = & -3.
\end{array}
$$

Reducción a un sistema de ecuaciones lineales

Trabajamos con el mismo ejemplo

Se busca un polinomio P de grado ≤ 2 tal que

Buscamos P en la forma $P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
P(-2) & = & 5 & \iff & c_0 & + & (-2)c_1 & + & (-2)^2 c_2 & = & 5, \\
P(1) & = & 2 & \iff & c_0 & + & 1c_1 & + & 1^2 c_2 & = & 2, \\
P(2) & = & -3 & \iff & c_0 & + & 2c_1 & + & 2^2 c_2 & = & -3.
\end{array}$$

Es un sistema de tres ecuaciones lineales para tres incógnitas c_0, c_1, c_2.
El mismo sistema en la forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Reducción a un sistema de ecuaciones lineales

Terminación del ejemplo

El sistema de ecuaciones se resuelve fácilmente:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]. \qquad \begin{aligned} c_0 &= 5, \\ c_1 &= -2, \\ c_2 &= -1. \end{aligned}$$

Respuesta:

$$P(x) = 5 - 2x - x^2.$$

Comprobemos que $\quad P(-2) = 5, \quad P(1) = 2, \quad P(2) = -3$:

$$\begin{array}{r|rrrl} & -1 & -2 & 5 & \\ \hline -2 & -1 & 0 & 5 & \checkmark \\ 1 & -1 & -3 & 2 & \checkmark \\ 2 & -1 & -4 & -3 & \checkmark \end{array}$$

Observación acerca de la matriz del sistema

La matriz del sistema de ecuaciones tenía una forma muy especial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & (-2)^2 \\ 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \end{bmatrix}$$

Observación acerca de la matriz del sistema

La matriz del sistema de ecuaciones tenía una forma muy especial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Observación acerca de la matriz del sistema

La matriz del sistema de ecuaciones tenía una forma muy especial:

$$V(x_0, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Es una matriz de Vandermonde asociada a los puntos x_0, x_1, x_2.

Observación acerca de la matriz del sistema

La matriz del sistema de ecuaciones tenía una forma muy especial:

$$V(x_0, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Es una matriz de Vandermonde asociada a los puntos x_0, x_1, x_2.

En el problema de interpolación polinomial con cuatro puntos,
la matriz del sistema sería

$$V(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{bmatrix}.$$

Matriz de Vandermonde (definición general)

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \left[\ x_j^k\ \right]_{j,k=0}^{n}.$$

Matriz de Vandermonde (definición general)

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \left[\ x_j^k\ \right]_{j,k=0}^{n}.$$

Ejercicio de programación.
En algún lenguaje programación escribir una función
que construya la matriz de Vandermonde asociada a los puntos dados.

Ejercicios (matrices de Vandermonde de orden 3)

$$V(a, b, c) =$$

Ejercicios (matrices de Vandermonde de orden 3)

$$V(a, b, c) = \begin{bmatrix} a^0 & a^1 & a^2 \\ b^0 & b^1 & b^2 \\ c^0 & c^1 & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicios (matrices de Vandermonde de orden 3)

$$V(a,b,c) = \begin{bmatrix} a^0 & a^1 & a^2 \\ b^0 & b^1 & b^2 \\ c^0 & c^1 & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}.$$

$$V(-5,-3,0) =$$

Ejercicios (matrices de Vandermonde de orden 3)

$$V(a,b,c) = \begin{bmatrix} a^0 & a^1 & a^2 \\ b^0 & b^1 & b^2 \\ c^0 & c^1 & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}.$$

$$V(-5,-3,0) = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 1 & -3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicios (matrices de Vandermonde de orden 2)

$$V(p, q) =$$

Ejercicios (matrices de Vandermonde de orden 2)

$$V(p, q) = \begin{bmatrix} p^0 & p^1 \\ q^0 & q^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & p \\ 1 & q \end{bmatrix}.$$

Ejercicios (matrices de Vandermonde de orden 2)

$$V(p, q) = \begin{bmatrix} p^0 & p^1 \\ q^0 & q^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & p \\ 1 & q \end{bmatrix}.$$

$$V(4, -7) =$$

Ejercicios (matrices de Vandermonde de orden 2)

$$V(p,q) = \begin{bmatrix} p^0 & p^1 \\ q^0 & q^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & p \\ 1 & q \end{bmatrix}.$$

$$V(4,-7) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Ejercicios (matrices de Vandermonde de orden 4)

$$V(x_0, x_1, x_2, x_3) =$$

Ejercicios (matrices de Vandermonde de orden 4)

$$V(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{bmatrix}.$$

Ejercicios (matrices de Vandermonde de orden 4)

$$V(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{bmatrix}.$$

$$V(-4, 0, 5, -4) =$$

Ejercicios (matrices de Vandermonde de orden 4)

$$V(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{bmatrix}.$$

$$V(-4, 0, 5, -4) = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 16 & -64 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & -4 & 16 & -64 \end{bmatrix}.$$

Teorema sobre sistemas cuadrados de ecuaciones lineales

Sea A una matriz cuadrada y sea b un vector
(el orden de A coincide con la longitud de b).

Entonces el sistema de ecuaciones lineales

$$Au = b$$

tiene una única solución si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

Contenido

Reducción del problema a un sistema lineal

Determinantes de Vandermonde

Existencia y unicidad del polinomio interpolante

Fórmulas para los determinantes de Vandermonde

(sin demostración)

$$\det V(x_0, x_1) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0,$$

Fórmulas para los determinantes de Vandermonde

(sin demostración)

$$\det V(x_0, x_1) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0,$$

$$\det V(x_0, x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

Fórmulas para los determinantes de Vandermonde

(sin demostración)

$$\det V(x_0, x_1) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0,$$

$$\det V(x_0, x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

$$\det V(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2). \end{array}$$

Observamos que los factores en el lado derecho son de la forma

$$x_k - x_j, \qquad \text{con} \qquad k > j.$$

Fórmula general para el determinante de Vandermonde

Teorema. Sean $x_0, \ldots, x_n$ algunos números. Entonces

$$\det V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{0 \le j < k \le n} (x_k - x_j) = \prod_{k=1}^{n} \prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j).$$

Fórmula general para el determinante de Vandermonde

Teorema. Sean $x_0, \ldots, x_n$ algunos números. Entonces

$$\det V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{0 \le j < k \le n} (x_k - x_j) = \prod_{k=1}^{n} \prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j).$$

Corolario. Si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son diferentes a pares, entonces

$$\det V(x_0, x_1, \ldots, x_n) \neq 0.$$

Fórmula general para el determinante de Vandermonde

Teorema. Sean $x_0, \ldots, x_n$ algunos números. Entonces

$$\det V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{0 \le j < k \le n} (x_k - x_j) = \prod_{k=1}^{n} \prod_{j=0}^{k-1} (x_k - x_j).$$

Corolario. Si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son diferentes a pares, entonces

$$\det V(x_0, x_1, \ldots, x_n) \neq 0.$$

Ejercicio de programación. Escribir una función que calcule $\det V(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ por la fórmula escrita arriba en el teorema.

Ejercicios (determinantes de Vandermonde de orden 3)

Escribir la fórmula para los determinantes de Vandermonde de orden 3:

$$\det V(x_0, x_1, x_2) = \prod_{0 \le j < k \le 2} (x_k - x_j) =$$

Ejercicios (determinantes de Vandermonde de orden 3)

Escribir la fórmula para los determinantes de Vandermonde de orden 3:

$$\det V(x_0, x_1, x_2) = \prod_{0 \leq j < k \leq 2} (x_k - x_j) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1).$$

Ejercicios (determinantes de Vandermonde de orden 3)

Escribir la fórmula para los determinantes de Vandermonde de orden 3:

$$\det V(x_0, x_1, x_2) = \prod_{0 \le j < k \le 2} (x_k - x_j) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1).$$

Aplicar la fórmula, esto es, escribir los siguientes determinantes cómo ciertos productos de diferencias y calcularlos:

Ejercicios (determinantes de Vandermonde de orden 3)

Escribir la fórmula para los determinantes de Vandermonde de orden 3:

$$\det V(x_0, x_1, x_2) = \prod_{0 \le j < k \le 2} (x_k - x_j) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1).$$

Aplicar la fórmula, esto es, escribir los siguientes determinantes
cómo ciertos productos de diferencias y calcularlos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \end{vmatrix} =$$

Ejercicios (determinantes de Vandermonde de orden 3)

Escribir la fórmula para los determinantes de Vandermonde de orden 3:

$$\det V(x_0, x_1, x_2) = \prod_{0 \le j < k \le 2} (x_k - x_j) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1).$$

Aplicar la fórmula, esto es, escribir los siguientes determinantes cómo ciertos productos de diferencias y calcularlos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \end{vmatrix} = \det V(2, 5, 6) = (5-2)(6-2)(6-5) = 3 \cdot 4 \cdot 1 = 12.$$

Ejercicios (determinantes de Vandermonde de orden 3)

Escribir la fórmula para los determinantes de Vandermonde de orden 3:

$$\det V(x_0, x_1, x_2) = \prod_{0 \le j < k \le 2} (x_k - x_j) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1).$$

Aplicar la fórmula, esto es, escribir los siguientes determinantes cómo ciertos productos de diferencias y calcularlos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \end{vmatrix} = \det V(2,5,6) = (5-2)(6-2)(6-5) = 3 \cdot 4 \cdot 1 = 12.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} =$$

Ejercicios (determinantes de Vandermonde de orden 3)

Escribir la fórmula para los determinantes de Vandermonde de orden 3:

$$\det V(x_0, x_1, x_2) = \prod_{0 \le j < k \le 2} (x_k - x_j) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1).$$

Aplicar la fórmula, esto es, escribir los siguientes determinantes cómo ciertos productos de diferencias y calcularlos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \end{vmatrix} = \det V(2,5,6) = (5-2)(6-2)(6-5) = 3 \cdot 4 \cdot 1 = 12.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} = \det V(-3,-1,5) = (-1+3)(5+3)(5+1) = 2 \cdot 8 \cdot 6 = 96.$$

Ejercicios (determinantes de Vandermonde de orden 2)

$$\det V(x_0, x_1) =$$

Ejercicios (determinantes de Vandermonde de orden 2)

$$\det V(x_0, x_1) = \prod_{0 \leq j < k \leq 1} (x_k - x_j) = x_1 - x_0.$$

Ejercicios (determinantes de Vandermonde de orden 2)

$$\det V(x_0, x_1) = \prod_{0 \le j < k \le 1} (x_k - x_j) = x_1 - x_0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

Ejercicios (determinantes de Vandermonde de orden 2)

$$\det V(x_0, x_1) = \prod_{0 \le j < k \le 1} (x_k - x_j) = x_1 - x_0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \det V(-5, 3) = 3 + 5 = 8.$$

Ejercicios (determinantes de Vandermonde de orden 2)

$$\det V(x_0, x_1) = \prod_{0 \le j < k \le 1} (x_k - x_j) = x_1 - x_0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \det V(-5, 3) = 3 + 5 = 8.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

Ejercicios (determinantes de Vandermonde de orden 2)

$$\det V(x_0, x_1) = \prod_{0 \le j < k \le 1} (x_k - x_j) = x_1 - x_0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \det V(-5, 3) = 3 + 5 = 8.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \det V(-6, -2) = -2 + 6 = 4.$$

Ejercicios (determinantes de Vandermonde de orden 4)

$$\det V(x_0, x_1, x_2, x_3) = \prod_{0 \le j < k \le 3} (x_k - x_j) =$$

Ejercicios (determinantes de Vandermonde de orden 4)

$$\det V(x_0, x_1, x_2, x_3) = \prod_{0 \leq j < k \leq 3} (x_k - x_j) = \begin{array}{c} (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2). \end{array}$$

Ejercicios (determinantes de Vandermonde de orden 4)

$$\det V(x_0, x_1, x_2, x_3) = \prod_{0 \le j < k \le 3} (x_k - x_j) = \begin{array}{l} (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2). \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} =$$

Ejercicios (determinantes de Vandermonde de orden 4)

$$\det V(x_0, x_1, x_2, x_3) = \prod_{0 \le j < k \le 3} (x_k - x_j) = \begin{array}{l} (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2). \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = \det V(-2, 0, 1, 3) = (2)(3)(1)(5)(3)(2) = 180.$$

Contenido

Reducción del problema
a un sistema lineal

Determinantes
de Vandermonde

Existencia y unicidad
del polinomio interpolante

Teorema: existencia y unicidad del polinomio interpolante.

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ algunos números diferentes a pares
y sean $y_0, y_1, \ldots, y_n$ números cualesquiera.

Entonces existe un único polinomio P de grado $\leq n$ tal que

$$\forall j \in \{0, 1, \ldots, n\} \qquad P(x_j) = y_j.$$

Demostración para $n = 2$ (para el caso de tres puntos)

Inicio de la demostración

Estamos buscando los coeficientes del polinomio P;
los denotemos por c_0, c_1, c_2:

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2.$$

Demostración para $n = 2$ (para el caso de tres puntos)

Inicio de la demostración

Estamos buscando los coeficientes del polinomio P;
los denotemos por c_0, c_1, c_2:

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2.$$

Para cada $j \in \{0, 1, 2\}$ sustituimos x_j en P e igualamos el resultado a y_j:

Demostración para $n = 2$ (para el caso de tres puntos)

Inicio de la demostración

Estamos buscando los coeficientes del polinomio P;
los denotemos por c_0, c_1, c_2:

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2.$$

Para cada $j \in \{0, 1, 2\}$ sustituimos x_j en P e igualamos el resultado a y_j:

$$\begin{aligned}
P(x_0) = y_0 &: \qquad c_0 + x_0 c_1 + x_0^2 c_2 = y_0; \\
P(x_1) = y_1 &: \qquad c_0 + x_1 c_1 + x_1^2 c_2 = y_1; \\
P(x_2) = y_2 &: \qquad c_0 + x_2 c_1 + x_2^2 c_2 = y_2.
\end{aligned}$$

Demostración para $n = 2$ (para el caso de tres puntos)

Inicio de la demostración

Estamos buscando los coeficientes del polinomio P;
los denotemos por c_0, c_1, c_2:

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2.$$

Para cada $j \in \{0, 1, 2\}$ sustituimos x_j en P e igualamos el resultado a y_j:

$$\begin{aligned}
P(x_0) = y_0: &\qquad c_0 + x_0 c_1 + x_0^2 c_2 = y_0; \\
P(x_1) = y_1: &\qquad c_0 + x_1 c_1 + x_1^2 c_2 = y_1; \\
P(x_2) = y_2: &\qquad c_0 + x_2 c_1 + x_2^2 c_2 = y_2.
\end{aligned}$$

Es un sistema de tres ecuaciones lineales para tres incógnitas c_0, c_1, c_2.
Este sistema es equivalente al problema de interpolación polinomial.

Demostración para $n = 2$ (para el caso de tres puntos)

Final de la demostración

El mismo sistema en la forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Demostración para $n = 2$ (para el caso de tres puntos)

Final de la demostración

El mismo sistema en la forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

La matriz del sistema es la matriz de Vandermonde $V(x_0, x_1, x_2)$.
Su determinante se calcula por medio de la siguiente fórmula:

$$\det V(x_0, x_1, x_2) = \prod_{0 \le j < k \le 2} (x_k - x_j) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1).$$

Demostración para $n = 2$ (para el caso de tres puntos)

Final de la demostración

El mismo sistema en la forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

La matriz del sistema es la matriz de Vandermonde $V(x_0, x_1, x_2)$.
Su determinante se calcula por medio de la siguiente fórmula:

$$\det V(x_0, x_1, x_2) = \prod_{0 \le j < k \le 2} (x_k - x_j) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1).$$

La hipótesis que los puntos x_0, x_1, x_2 son diferentes a pares implica que sus diferencias $x_k - x_j$ (con $j < k$) son no nulas.

Demostración para $n = 2$ (para el caso de tres puntos)

Final de la demostración

El mismo sistema en la forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

La matriz del sistema es la matriz de Vandermonde $V(x_0, x_1, x_2)$.
Su determinante se calcula por medio de la siguiente fórmula:

$$\det V(x_0, x_1, x_2) = \prod_{0 \le j < k \le 2} (x_k - x_j) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1).$$

La hipótesis que los puntos x_0, x_1, x_2 son diferentes a pares implica que sus diferencias $x_k - x_j$ (con $j < k$) son no nulas.

Por eso $\det V(x_0, x_1, x_2) \neq 0$, y el sistema tiene una única solución. $\square$

Ejercicio

Escribir la demostración para $n = 3$ (para 4 puntos).

Demostración para el caso general ($n+1$ puntos)

Inicio de la demostración

Denotemos por $c_0, \ldots, c_n$ a los coeficientes del polinomio P:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

Demostración para el caso general ($n+1$ puntos)

Inicio de la demostración

Denotemos por $c_0, \ldots, c_n$ a los coeficientes del polinomio P:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

Entonces las condiciones $P(x_j) = y_j$ se escriben de la siguiente manera:

$$\sum_{k=0}^{n} x_j^k c_k = y_j \qquad (j = 0, 1, \ldots, n).$$

Demostración para el caso general ($n+1$ puntos)

Inicio de la demostración

Denotemos por $c_0, \ldots, c_n$ a los coeficientes del polinomio P:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

Entonces las condiciones $P(x_j) = y_j$ se escriben de la siguiente manera:

$$\sum_{k=0}^{n} x_j^k c_k = y_j \qquad (j = 0, 1, \ldots, n).$$

Obtuvimos un sistema de $n+1$ ecuaciones lineales
para las $n+1$ incógnitas $c_0, c_1, \ldots, c_n$.

Demostración para el caso general ($n+1$ puntos)

Inicio de la demostración

Denotemos por $c_0, \ldots, c_n$ a los coeficientes del polinomio P:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

Entonces las condiciones $P(x_j) = y_j$ se escriben de la siguiente manera:

$$\sum_{k=0}^{n} x_j^k c_k = y_j \qquad (j = 0, 1, \ldots, n).$$

Obtuvimos un sistema de $n+1$ ecuaciones lineales
para las $n+1$ incógnitas $c_0, c_1, \ldots, c_n$.

Este sistema es equivalente al problema original.

Demostración para el caso general ($n+1$ puntos)

Final de la demostración

Escribimos el mismo sistema en la forma matricial:

$$\left[\, x_j^k \,\right]_{j,k=0}^{n} \left[\, c_k \,\right]_{k=0}^{n} = \left[\, y_j \,\right]_{j=0}^{n}.$$

Demostración para el caso general ($n+1$ puntos)

Final de la demostración

Escribimos el mismo sistema en la forma matricial:

$$\left[\, x_j^k \,\right]_{j,k=0}^{n} \left[\, c_k \,\right]_{k=0}^{n} = \left[\, y_j \,\right]_{j=0}^{n}.$$

Más brevemente,

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, c = y.$$

Demostración para el caso general ($n + 1$ puntos)

Final de la demostración

Escribimos el mismo sistema en la forma matricial:

$$\left[\, x_j^k \,\right]_{j,k=0}^{n} \left[\, c_k \,\right]_{k=0}^{n} = \left[\, y_j \,\right]_{j=0}^{n}.$$

Más brevemente,

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, c = y.$$

La matriz del sistema es una matriz de Vandermonde. Su determinante es

$$\det V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{0 \le j < k \le n} (x_k - x_j).$$

Demostración para el caso general ($n+1$ puntos)

Final de la demostración

Escribimos el mismo sistema en la forma matricial:

$$\left[\, x_j^k \,\right]_{j,k=0}^{n} \left[\, c_k \,\right]_{k=0}^{n} = \left[\, y_j \,\right]_{j=0}^{n}.$$

Más brevemente,

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, c = y.$$

La matriz del sistema es una matriz de Vandermonde. Su determinante es

$$\det V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{0 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j).$$

La hipótesis que los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son diferentes a pares implica que sus diferencias $x_k - x_j$ (con $j < k$) son no nulas.

Demostración para el caso general ($n+1$ puntos)

Final de la demostración

Escribimos el mismo sistema en la forma matricial:

$$\left[\, x_j^k \,\right]_{j,k=0}^{n} \left[\, c_k \,\right]_{k=0}^{n} = \left[\, y_j \,\right]_{j=0}^{n}.$$

Más brevemente,

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n)\, c = y.$$

La matriz del sistema es una matriz de Vandermonde. Su determinante es

$$\det V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{0 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j).$$

La hipótesis que los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son diferentes a pares implica que sus diferencias $x_k - x_j$ (con $j < k$) son no nulas.

Por eso $\det V(x_0, x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, y el sistema tiene una única solución. $\square$

Resumen y temas para futuro

Con ayuda de determinantes de Vandermonde hemos demostrado
que el problema de interpolación polinomial tiene una única solución.

En un futuro vamos a estudiar:

- La fórmula de Lagrange.
- Estimación del error en la interpolación polinomial.
- Algoritmos de Neville y de Newton.
- Aplicaciones.