Error de la interpolación polinomial

Objetivos. Deducir la fórmula del error en la interpolación polinomial. Practicar esta fórmula con ejemplos simples.

Requisitos. Teorema de la existencia y unicidad del polinomio interpolante, fórmula de Lagrange para el polinomio interpolante, teorema generalizado de Rolle.

Repaso de las herramientas auxiliares

1. Polinomio interpolante, fórmula de Lagrange. Dados los números distintos $x_1, \ldots, x_n$ y los números arbitrarios $y_1, \ldots, y_n$, existe un único polinomio P de grado $\leq n-1$ tal que

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \qquad P(x_k) = y_k.$$

Este *polinomio interpolante* se puede calcular mediante la fórmula de Lagrange:

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

En el caso si los números y_k son los valores de una función f en puntos x_k ($y_k = f(x_k)$), se dice que P es el *polinomio interpolante* de la función f en los *nodos* x_k.

2. Teorema de Rolle (repaso). Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe un número ξ en (a, b) tal que $f'(\xi) = 0$.

3. Teorema generalizado de Rolle. Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^n[a, b]$ que se anula en algunos $n + 1$ puntos (diferentes a pares) del intervalo $[a, b]$. Entonces existe un número ξ en (a, b) tal que $f^{(n)}(\xi) = 0$.

4. Sobre las derivadas de órdenes mayores de un polinomio. Sea P un polinomio de grado $\leq n-1$:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}.$$

Entonces su $(n-1)$-ésima derivada es constante:

$$P^{(n-1)}(x) = (n-1)!\, a_{n-1},$$

y las siguientes derivadas son cero:

$$P^{(n)}(x) = P^{(n+1)}(x) = P^{(n+2)}(x) = \ldots = 0.$$

Teorema

5. Teorema (fórmula del error de la interpolación polinomial). Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números diferentes por pares pertenecientes a un intervalo $[a, b]$ y sea $f \in C^n[a, b]$. Denotemos por P al polinomio interpolante de la función f en los nodos $x_1, \ldots, x_n$. Entonces para cada $x \in [a, b]$ existe un número $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{k=1}^{n} (x - x_k).$$

Idea de la demostración. Para $x = x_k$ ambos lados son iguales a $f(x_k)$ y la fórmula se cumple. Sea $x \in [a, b] \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Nótese que en la parte restante de la demostración el punto x es fijo. Consideremos la siguiente función auxiliar:

$$g(t) = f(t) - P(t) - \big(f(x) - P(x)\big) \prod_{k=1}^{n} \frac{t - x_k}{x - x_k}.$$

Es fácil ver que $g \in C^n[a, b]$ y g se anula en $n + 1$ puntos distintos $x_1, \ldots, x_n, x$. Por el teorema generalizado de Rolle, existe un punto $\xi \in (a, b)$ tal que $g^{(n)}(\xi) = 0$. Calculemos $g^{(n)}(\xi)$, usando la proposición sobre las derivadas de polinomios:

$$g^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - (f(x) - P(x)) \cdot \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} (x - x_k)}.$$

Al despejar $f(x) - P(x)$ obtenemos la fórmula enunciada. □

6. Observación. El teorema afirma la existencia de un número ξ con la propiedad escrita, pero no proporciona ningún procedimento cómodo para calcularlo. En la práctica se calcula

$$M \coloneqq \sup_{t \in [a,b]} |f^{(n)}(t)|$$

y se usa la siguiente cota superior del error:

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{n!} \prod_{k=1}^{n} |x - x_k|.$$

Ejemplos

7. Ejemplo. Construir el polinomio interpolante de Lagrange P que concuerda con $f(x) = \cos(x)$ en los puntos $-\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi$. Calcular $P(\frac{\pi}{4})$ y una cota superior del error $\left|P(\frac{\pi}{4}) - f(\frac{\pi}{4})\right|$ usando el teorema. Calcular el error efectivo $\left|P(\frac{\pi}{4}) - f(\frac{\pi}{4})\right|$.

8. Ejercicio. Construya el polinomio interpolante de Lagrange P que concuerda con $f(x) = e^x$ en los puntos $-2, -1, 0, 1, 2$. Calcule $P(-0.5)$ y una cota superior del error $|P(-0.5) - f(-0.5)|$ usando el teorema. Calcule el error efectivo $|P(-0.5) - f(-0.5)|$.