Matrices de permutación

1. Definición (permutación). Una *permutación* del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ es una función biyectiva de este conjunto sobre si mismo. El conjunto de todas las permutaciones del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ se denota por S_n. En otras palabras, la notación $\varphi \in S_n$ significa que φ es una permutación del conjunto $\{1,\ldots,n\}$.

2. Ejemplo. La función $\varphi\colon \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ definida mediante la regla

$$\varphi(1) = 3, \quad \varphi(2) = 1, \quad \varphi(3) = 5, \quad \varphi(4) = 4, \quad \varphi(5) = 2, \tag{1}$$

es una permutación del conjunto $\{1,2,3,4,5\}$, esto es, $\varphi \in S_5$. La regla de correspondencia (1) se escribe de manera más breve:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (3,1,5,4,2).$$

Permutación inversa

3. Permutación inversa. La *inversa* de una permutación φ es simplemente la función inversa φ^{-1}. Esto significa que si $\varphi(p) = q$, entonces $\varphi^{-1}(q) = p$. En el ejemplo anterior,

$$\varphi^{-1}(3) = 1, \quad \varphi^{-1}(1) = 2, \quad \varphi^{-1}(5) = 3, \quad \varphi^{-1}(4) = 4, \quad \varphi^{-1}(2) = 5,$$

esto es,

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Más ejemplos de permutaciones inversas.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \psi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\chi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \chi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Matrices de permutaciones

5. Ejemplo: una matriz de permutación. A la permutación φ del Ejemplo 2 se le asocia la matriz

$$P_\varphi = P_{3,1,5,4,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notemos que entre las entradas $(P_\varphi)_{1,j}$ del primer renglón de P_φ la única entrada igual a uno es $(P_\varphi)_{1,3}$, con $j = 3 = \varphi(1)$, y las demás entradas de este renglón son nulas. Usando la delta de Kronecker podemos escribir

$$(P_\varphi)_{1,j} = \delta_{\varphi(1),j}.$$

Las entradas de otros renglones también se expresan a través de la delta de Kronecker.

6. Definición (matriz de permutación). Sea $\varphi \in S_n$. Entonces la matriz P_φ se define mediante la regla

$$P_\varphi = \left[\delta_{\varphi(i),j}\right]_{i,j=1}^{n}.$$

7. Producto de una matriz de permutación por un vector. Si φ es la permutación del Ejemplo 2 y $v \in \mathbb{R}^5$, entonces

$$P_\varphi v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_3 \\ v_1 \\ v_5 \\ v_4 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{\varphi(1)} \\ v_{\varphi(2)} \\ v_{\varphi(3)} \\ v_{\varphi(4)} \\ v_{\varphi(5)} \end{bmatrix}.$$

8. Fórmula del producto de una matriz de permutación por un vector. Si $\varphi \in S_n$ y $v \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$P_\varphi v = \left[v_{\varphi(i)}\right]_{i=1}^{n}.$$

9. Ejemplos.

$$P_{3,1,2} \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad P_{4,1,5,3,2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

10. Ejemplos. Encontar una permutación $\varphi \in S_4$ tal que

$$P_\varphi \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Producto de una matriz de permutación por una matriz

11. Ejemplo. Si $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, entonces

$$P_{2,3,1}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \\ A_{1,1} & A_{1,2} \end{bmatrix}.$$

Denotando $P_{2,3,1}A$ por B y el renglón j de la matriz A por $A_{j,*}$, podemos escribir que

$$B = P_{2,3,1} \begin{bmatrix} A_{1,*} \\ A_{2,*} \\ A_{3,*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{2,*} \\ A_{3,*} \\ A_{1,*} \end{bmatrix}.$$

De aquí $B_{1,*} = A_{\varphi(1),*}$, $B_{2,*} = A_{\varphi(2),*}$, $B_{3,*} = A_{\varphi(3),*}$. En general,

$$B_{j,*} = A_{\varphi(j),*}.$$

12. Fórmula para el producto de una matriz de permutación por una matriz. Si $\varphi \in S_m$ y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, entonces

$$P_\varphi A = \left[A_{\varphi(i),j}\right]_{i,j=1}^{m,n}.$$

13. Ejemplo.

$$P_{5,1,3,2,4} \begin{bmatrix} -7 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -6 \\ -7 & 3 & 6 \\ 5 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

14. Ejemplo. Encontrar una permutación φ tal que

$$P_\varphi \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Notamos que

$$B_{1,*} = A_{3,*}, \qquad B_{2,*} = A_{1,*}, \qquad B_{3,*} = A_{2,*}.$$

Respuesta: $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Producto de una matriz general por una matriz de permutación

15. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\varphi \in S_n$, entonces la matriz AP_φ se obtiene de la matriz A al hacer cierto intercambio de las *columnas* de la matriz A. Más precisamente, la primera columna de la matriz AP_φ es la columna $\varphi^{-1}(1)$ de la matriz A, etc.

16. Ejemplo. Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$, $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces

$$AP_\varphi = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} & A_{2,5} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} & A_{3,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} & A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,3} & A_{2,4} & A_{2,5} & A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,3} & A_{3,4} & A_{3,5} & A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix}.$$

Si denotamos el producto AP_φ por B, entonces podemos expresar las columnas de B a través de las columnas de A de la siguiente manera:

$$B_{*,1} = A_{*,3}, \quad B_{*,2} = A_{*,4}, \quad B_{*,3} = A_{*,5}, \quad B_{*,4} = A_{*,1}, \quad B_{*,5} = A_{*,2}.$$

En general, $B_{*,j} = A_{*,\varphi^{-1}(j)}$, esto es,

$$B_{*,\varphi(k)} = A_{*,k}.$$

17. Ejemplo. Encontrar una permutación φ tal que

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 & 6 \\ 6 & -7 & -3 & -3 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} P_\varphi = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 & -7 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se ve que $A_{*,1} = B_{*,2}$, $A_{*,2} = B_{*,4}$, etc., así que

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$