Vectores y matrices

Vectores

1. Vectores como listas.

```
v = {5, -3, 2, 1}
Length[v]
v[[3]]
Part[v, 3]
v[[3]] = 1
```

2. Creación de vectores.

```
v = Range[3]
v = Range[2, 5]
v = Range[2.0, 4.0, 0.5]
v = Map[Sqrt, Range[4]]
v = Table[k ^ 2, {k, 4}]
v = Table[Mod[k, 2], {k, 4}]
v = Table[(-1) ^ k, {k, 4}]
v = Map[Function[k, k ^ 2], Range[4]]
v = Map[# ^ 2 &, Range[4]]
v = Table[Random[Real, {-1, 1}], {k, 3}]
v = Table[Random[Integer, {-4, 4}], {k, 4}]
randomIntVec[n_, vmin_, vmax_] :=
  Table[Random[Integer, {vmin, vmax}], {k, 4}]
unitVec[n_, k_] := Table[If[i == k, 1, 0], {i, n}]
```

3. Operaciones con vectores.

```
v = {1, -2, 3}
w = {3, 1, 1}
2 * v
w + v
v . w
v *= -1
v += w
Norm[v]
distVec[a_, b_] := Norm[a - b]
angleVec[a_, b_] := ArcCos[v . w / (Norm[v] * Norm[w])]
```

Matrices

4. Matrices como listas de listas.

```
a = {{4, -1, 2}, {2, 3, 5}}
Dimensions[a]
Dimensions[a][[1]]
a[[2]]
Part[a, 1, 3]
a[[1]][[3]]
a[[1, 3]]
a[[2, 3]] = 10
a[[1]] = {5, 7, -3}
a = Table[(-1) ^ (i + j), {i, 2}, {j, 3}]
```

5. Matriz identidad.

```
IdentityMatrix[3]
idmatrix[n_] := Table[If[i == j, 1, 0], {i, n}, {j, n}]
```

6. Tarea opcional. Escribir la función `diagMatrix[a_]` que construye la matriz diagonal con elementos diagonales dados en la lista `a`.

7. Tarea opcional. Escribir la función `randomIntMatrix[m_, n_, vmin_, vmax_]` que construye la matrix $m \times n$ con elementos enteros aleatorios de `vmin` a `vmax`.

8. Definición del producto de dos matrices y de la matriz transpuesta. Sean $A = (a_{i,j})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$, $B = (b_{i,j})_{1 \le i \le n, 1 \le k \le p}$. ¿Cómo se definen AB y A^T?

9. Producto de dos matrices y la matriz transpuesta en Mathematica.

```
a = {{3, -2, 1}, {2, 1, 2}}
b = {{2, 1}, {1, 3}, {0, -1}}
a . b
Transpose[a]
```

10. Cálculo del producto de dos matrices usando ciclos. La siguiente función calcula el producto de dos matrices:

```
myproduct[a_, b_] := Module[{result, m, n, p},
  {m, n} = Dimensions[a];
  p = Dimensions[b][[2]];
  result = Table[0, {i, m}, {j, p}];
  Do[result[[i, j]] += a[[i, k]]*b[[k, j]],
    {i, m}, {j, p}, {k, n}];
  result]
```

11. Cálculo del producto de dos matrices usando Table y Sum.

```
myproduct2[a_, b_] :=
  Table[Sum[a[[i, k]]*b[[k, j]], {k, Dimensions[a][[2]]}],
   {i, Dimensions[a][[1]]}, {j, Dimensions[b][[2]]}]
```

12. Tarea opcional. Escribir la funcion `transp[a_]` que construye la matriz transpuesta de la matriz dada `a`.

Definición (matrices triangulares). Matriz cuadrada $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ se llama *triangular superior*, si $a_{i,j} = 0$ para $i > j$.

13. Tarea opcional creativa. Demostrar que el producto de dos matrices triangulares superiores también es una matriz triangular superior.

Operaciones elementales

14. Ejemplos en Mathematica.

```
a = {{3, -1, 2}, {4, 2, 3}, {1, 1, 0}}
a[[2]] += (-2) * a[[1]]
a[[3]] *= -3
{a[[1]], a[[3]]} = {a[[3]], a[[1]]}
```

Definición de sistema de vectores linealmente dependiente. Sean $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Dicen que el sistema de vectores $(v_1, \ldots, v_m)$ es *linealmente dependiente*, si existen números $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq (0, \ldots, 0)$ y $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$.

Rango de un sistema de vectores

Definición de sistema de vectores linealmente independiente. Sean $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Dicen que el sistema de vectores $(v_1, \ldots, v_m)$ es *linealmente independiente*, si para todos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ la condición $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ implica que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

15. Criterio de sistema de vectores linealmente dependiente. Un sistema de vectores es linealmente dependiente $\iff$ un vector de este sistema se puede expresar como una combinación lineal de los demás.

Definición de rango de un sistema de vectores. Sea $v_1, \ldots, v_m$ un sistema de vectores. El *rango* de este sistema es el tamaño de su subsistema linealmente independiente máximo.

Definición de rango de una matriz. El rango de una matriz es el rango del sistema de filas de esta matriz.

16. Ejemplo. Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & -2 \\ -1 & 5 & -10 \end{pmatrix}$.