Interpolación segmentaria lineal
(splines lineales)

Agradezco a Juan Carlos González Rodríguez por correcciones.

Objetivos. Comprender el concepto de la interpolación segmentaria lineal para poder utilizar y programarla y para comprender después el concepto de la interpolación segmentaria cúbica.

Requisitos. La pendiente de una recta, límite izquierdo y derecho de una función, continuidad, discontinuidad de tipo "salto". Elementos de programación (funciones y ciclos).

1. Definición (restricción de una función a un conjunto, repaso). Sea $f\colon X \to Y$ una función y sea A un subconjunto de X. La *restricción* de la función f al conjunto A es la función $f|_A\colon A \to Y$ definida mediante

$$f|_A(x) = f(x) \qquad \forall x \in A.$$

En otras palabras, $f|_A$ coincide con f con la única diferencia que el dominio de $f|_A$ es A.

2. Definición (función lineal a trozos). Sean $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Sea $S\colon [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ una función. Denotemos por S_k sus restricciones a los intervalos $[x_k, x_{k+1}]$:

$$S_k(x) \coloneqq S(x) \qquad \forall x \in [x_k, x_{k+1}].$$

Si todas las funciones S_k son lineales, esto es, existen números $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$S_k(x) = a_k + b_k(x - x_k),$$

entonces la función S se llama *lineal a trozos*.

3. Idea de la interpolación lineal a trozos. Dados los puntos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ y los valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$, construyamos la función S tal que:

1. Para todo $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ la restricción de la función S al intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ es una función lineal:

$$S(x) = a_k + b_k(x - x_k) \qquad \forall x \in [x_k, x_{k+1}].$$

2. $S(x_k) = y_k$ para todo k.

Se dice que S es la función interpolante lineal a trozos que une los puntos (x_k, y_k), $k \in \{0, \dots, n\}$.

4. Ejercicio (fórmulas para los coeficientes). Sabemos que $S(x) = a_k + b_k(x - x_k)$ en el intervalo $[x_k, x_{k+1}]$. Poniendo $x = x_k$ y $x = x_{k+1}$ y usando las condiciones $S(x_k) = y_k$, $S(x_{k+1}) = y_{k+1}$ calcule los coeficientes a_k y b_k. Respuesta:

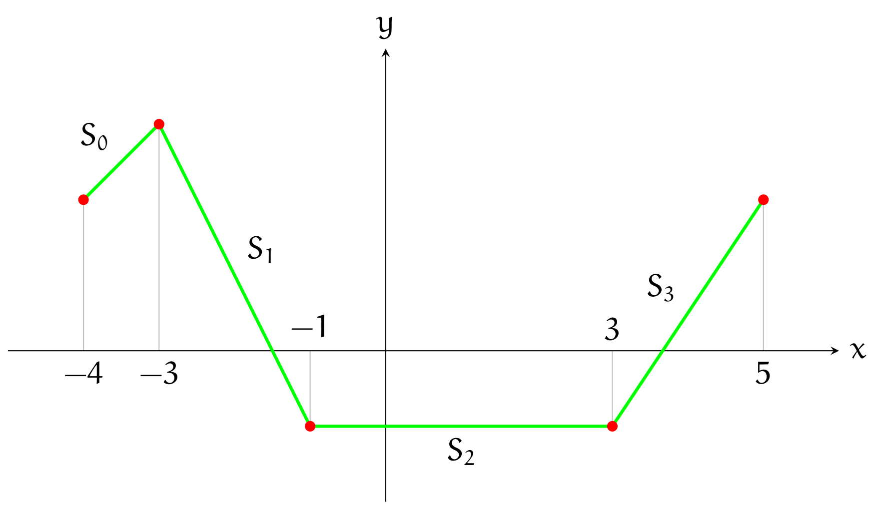
$$a_k = y_k, \qquad b_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}.$$

5. Ejemplo. Construir la función interpolante S lineal a trozos que corresponda a las siguientes abscisas y ordenadas:

$$\begin{array}{lllll} x_0 = -4, & x_1 = -3, & x_2 = -1, & x_3 = 3, & x_4 = 5 \\ y_0 = 2, & y_1 = 3, & y_2 = -1, & y_3 = -1, & y_4 = 2. \end{array}$$

Calcular $S(4)$.

Solución. Representamos los nodos dados en el plano y los unimos sucesivamente con segmentos de recta. Nuestro objetivo es describir la gráfica obtenida de manera analítica.



Calculemos los coeficientes a_k, b_k y construyamos las funciones lineales S_k:

$x_0 = -4$	$y_0 = 2$	$a_0 = 2$	$b_0 = \frac{1}{2}$	$S_0(x) = 2 + \frac{1}{2}(x+4)$
$x_1 = -3$	$y_1 = 3$	$a_1 = 3$	$b_1 = -2$	$S_1(x) = 3 - 2(x+3)$
$x_2 = -1$	$y_2 = -1$	$a_2 = -1$	$b_2 = 0$	$S_2(x) = -1$
$x_3 = 3$	$y_3 = -1$	$a_3 = -1$	$b_3 = \frac{3}{2}$	$S_3(x) = -1 + \frac{3}{2}(x-3)$
$x_4 = 5$	$y_4 = 2$			

Para calcular $S(4)$, buscamos el segmento de forma $[x_k, x_{k+1}]$ que contiene al punto $x = 4$. Es fácil ver que $4 \in [x_3, x_4]$, así que $k = 3$.

$$S(4) = S_3(4) = -1 + \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}. \qquad \square$$

6. Programación: notación para las listas. Vamos a denotar por x al arreglo (o la lista) que consiste de las absicas $x_0, \ldots, x_n$, así que $x[k] = x_k$. En un sentido similar usemos las notaciones y, a, b.

7. Programación: coeficientes de interpolación lineal a trozos. Escriba una función `LinSplineCoefs` con argumentos x, y que calcule las listas a y b de los coeficientes de la función interpolante lineal a trozos correspondiente a las abscisas x y las ordenadas y.

8. Programación: búsqueda del intervalo que contiene la abscisa dada. Escriba una función FindSegment con argumentos x, u que regrese el índice k tal que $u \in [x_k, x_{k+1}]$. Se supone que $u \in [x_0, x_n]$.

9. Programación: cálculo de los valores de la función interpolante lineal a trozos. Escriba una función LinSpline con argumentos x, a, b, u que regrese el valor de la función S en el punto u. Aquí S es la función lineal a trozos definida por la lista de las abscisas x y las listas de los coeficientes a y b.