Polinomio interpolante en forma de Lagrange

Objetivos. Deducir la fórmula de Lagrange para el polinomio interpolante. Practicar esta fórmula con ejemplos simples.

Requisitos. Teorema de existencia y unicidad del polinomio interpolante, teorema del resto, factorización de los polinomios en factores de grado uno, algoritmo de multiplicación de un polinomio por un binomio.

1. Concepto del polinomio interpolante (repaso). Dados algunos números distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y algunos números arbitrarios $y_0, y_1, \ldots, y_n$, el problema de la interpolación polinomios consiste en encontrar un polinomio P de grado $\leq n$ tal que $P(x_k) = y_k$ para cada k en $\{0, \ldots, n\}$.

Ya hemos mostrado que este problema siempre tiene una única solución, es decir, el polinomio interpolante **existe** y es **único**. Ahora vamos a deducir una fórmula explícita y simple para este polinomio, que lleva el nombre de Lagrange.

Repaso de herramientas necesarias para deducir la forma de Lagrange del polinomio interpolante

2. División de un polinomio entre un binomio (repaso). Sea P un polinomio y sea x_0 un número. Entonces se puede construir un único polinomio Q y un único número r tales que

$$P(x) = (x - x_0)Q(x) + r. \tag{1}$$

En el inicio del curso deducimos un algoritmo para calcular los coeficientes de Q y el residio r.

3. Teorema del resto (repaso). En la fórmula (1) el número r coincide con el valor del polinomio P en el punto x_0:

$$P(x_0) = r.$$

La demostración es trivial: sustituir x por x_0 en ambos lados de (1) y notar que $(x_0 - x_0)Q(x_0) = 0$.

4. Corolario del teorema del resto (repaso). El polinomio P se divide sin residuo entre el binomio $x - x_0$ si y sólo si $P(x_0) = 0$.

5. Factorización de un polinomio que tiene dos raíces diferentes. Supongamos que P es un polinomio y que x_0, x_1 son dos números diferentes tales que $P(x_0) = 0$ y $P(x_1) = 0$. Primero notamos que P se divide sin residuo entre el binomio $x - x_0$, es decir, existe un polinomio Q_1 tal que

$$P(x) = (x - x_0)Q_1(x).$$

Evaluamos ambos lados de esta igualdad en el punto x_1: $P(x_1) = (x_1 - x_0)Q_1(x_1)$. Como $P(x_1) = 0$ y $x_1 - x_0 \neq 0$, obtenemos que $Q_1(x_1) = 0$. Entonces Q_1 se divide sin residuo entre el binomio $x - x_1$, es decir, existe un polinomio Q_2 tal que

$$Q_1(x) = (x - x_1)Q_2(x).$$

Por lo tanto,

$$P(x) = (x - x_0)(x - x_1)Q_2(x).$$

6. Proposición sobre la factorización de un polinomio de grado $\le n$ que tiene $n + 1$ raíces diferentes. Supongamos que P es un polinomio de grado $\le n$ que tiene $n + 1$ raíces diferentes $x_0, \ldots, x_n$. Entonces $\deg(P) = n$ y existe una constante c tal que

$$P(x) = c(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

La idea de demostración está explicada arriba para el caso particular $n = 1$.

Polinomios básicos de Lagrange

7. Ejemplo. Sean x_0, x_1, x_2 algunos tres números diferentes a pares. Vamos a construir un polinomio L_0 de grado 2 tal que

$$L_0(x_0) = 1, \qquad L_0(x_1) = 0, \qquad L_0(x_2) = 0.$$

Aplicamos la proposición anterior. Para anularse en los puntos x_1 y x_2 el polinomio L_0 debe ser de la forma

$$L_0(x) = c(x - x_1)(x - x_2).$$

Ahora usamos elegimos c de tal manera que se cumpla la igualdad $L_0(x_0) = 1$:

$$1 = c(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}.$$

Respuesta:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}.$$

8. Polinomios básicos de Lagrange L_j en el caso general. Sea

$$\boxed{L_j(x) = \prod_{\substack{0 \le k \le n \\ k \ne j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.}$$

En forma más extensa,

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (x_j - x_n)}.$$

Entonces $L_j(x_j) = 1$ y $L_j(x_k) = 0$ si $k \ne j$. En otras palabras,

$$\boxed{L_j(x_k) = \delta_{j,k} \qquad (0 \le j, k \le n).}$$

Polinomio interpolante en la forma de Lagrange

9. Deducción de la fórmula de Lagrange para $n = 2$. Para comprender mejor la idea y no perdernos en notaciones, empezamos con el caso particular $n = 2$. Sean x_0, x_1, x_2 números diferentes por pares, y sean y_0, y_1, y_2 algunos números. Vamos a construir en forma explicita un polinomio P de grado ≤ 2 tal que $P(x_k) = y_k$. Buscamos este polinomio en forma de "combinación lineal" de los números y_0, y_1, y_2:

$$P(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x), \tag{2}$$

donde L_0, L_1, L_2 son polinomios de grado ≤ 2, cuyos coeficientes no dependen de y_0, y_1, y_2, i.e. dependen sólo de x_0, x_1, x_2. En otras palabras, los polinomios L_0, L_1, L_2 serán los mismos para cualesquiera valores de y_0, y_1, y_2.

En particular, pongamos $y_0 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ y evaluemos ambos lados de la igualdad (2) en el punto $x = x_0$:

$$1 = 1 \cdot L_0(x_0).$$

Luego en $x = x_1$:

$$0 = 1 \cdot L_0(x_1).$$

Al final, en $x = x_2$:

$$0 = 1 \cdot L_0(x_2).$$

Vemos que L_0 debe cumplir con las siguientes condiciones:

$$L_0(x_0) = 1, \qquad L_0(x_1) = 0, \qquad L_0(x_2) = 0.$$

Como L_0 tiene raíces x_1 y x_2 y $\deg(L_0) \le 2$, por la proposición enunciada tenemos que

$$L_0(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2).$$

Usando la condición $L_0(x_0) = 1$, calculamos el coeficiente α:

$$\alpha = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}.$$

Haciendo cálculos similares para L_1 y L_2, podemos probar que

$$L_j(x_k) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

y obtener las siguientes fórmulas:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)},$$
$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)},$$
$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

10. Polinomio interpolante de Lagrange.

$$\boxed{L(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x).}$$

11. Ejemplo. Usando la fórmula de Lagrange construya un polinomio P de grado ≤ 2 tal que

$$P(-1) = 15, \qquad P(4) = 5, \qquad P(5) = 9.$$

Respuesta: $P(x) = x^2 - 5x + 9$.

12. Ejercicio. Usando la fórmula de Lagrange construya un polinomio P de grado ≤ 2 tal que

$$P(-2) = -7, \qquad P(-1) = -6, \qquad P(3) = 18.$$

Respuesta: $P(x) = x^2 + 4x - 3$.

13. Observación. Es posible mostrar que el número de operaciones aritméticas que se usan en la fórmula de Lagrange tiene orden n^3. Hay métodos más eficientes para calcular el polinomio interpolante (por ejemplo a través de las diferencias divididas). Sin embargo, la fórmula de Lagrange es muy útil para varios razonamientos teóricos. Por ejemplo, con la fórmula de Lagrange vamos a deducir la fórmula del error en la interpolación polinomial.