Ejemplos de aplicación del método del punto fijo

El método del punto fijo es muy general y se puede aplicar para resolver ecuaciones integrales y diferenciales. Nosotros vamos a aplicar este método solamente en el caso de funciones reales derivables:

1. Teorema del punto fijo (para funciones reales derivables). Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y sea $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) que cumple las siguientes condiciones:

1. Existe un número $C \in [0, 1)$ tal que para cualquier $x \in (a, b)$ se cumple la desigualdad $|g'(x)| \leq C$.
2. Para cualquier punto x en $[a, b]$, se tiene que $g(x) \in [a, b]$.

Entonces existe un único punto $p \in (a, b)$ tal que $g(p) = p$. Además, si x_0 es algún punto del intervalo $[a, b]$, y la sucesión $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ se construye de manera recursiva con el *método de iteración simple*:

$$x_{k+1} \coloneqq g(x_k),$$

entonces la sucesión $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ converge al punto fijo p de la función g.

En ejemplos simples es cómo denotar por C al máximo de $|g'(x)|$ en le intervalo $[a, b]$:

$$C \coloneqq \max_{x \in [a,b]} |g'(x)|,$$

calcularlo y verificar que $C < 1$.

2. Ejemplo. Sea $g\colon [0.64, 1.44] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) := \sqrt{x}.$$

Mostrar que g es una función contractiva, calcular su punto fijo y hacer las primeras 5 iteración del método del punto fijo empezando con $x_0 = 0.64$.

Solución. I. Calculemos la derivada de g:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Se ve que g' es una función positiva y decreciente, por eso es fácil calcular el máximo de su valor absoluto:

$$C := \max_{x\in[0.64,1.44]} |g'(x)| = \max_{x\in[0.64,1.44]} g'(x) = g'(0.64) = \frac{1}{2\cdot 0.8} = 0.625 < 1.$$

II. Luego hay que demostrar que $g([0.64, 1.44]) \subset [0.64, 1.44]$. Calculemos los valores mínimo y máximo de g en el intervalo $[0.64, 1.44]$. Como $g' > 0$, la función g es creciente,

$$\min_{x\in[0.64,1.44]} g(x) = g(0.64) = 0.8, \qquad \max_{x\in[0.64,1.44]} g(x) = g(1.44) = 1.2,$$

y

$$g([0.64, 1.44]) = [g(0.64), g(1.44)] = [0.8, 1.2].$$

Observamos que $0.64 < 0.8$ y $1.2 < 1.44$, así que $[0.8, 1.2] \subset [0.64, 1.44]$.

III. En los incisos I y II demostramos que

$$\max_{x\in[0.64,1.44]} |g'(x)| < 1 \qquad \text{y} \qquad g([0.64, 1.44]) \subset [0.64, 1.44].$$

Esto significa que g es contractiva en el intervalo $[0.64, 1.44]$. Por lo tanto, g tiene un único punto fijo en este intervalo.

IV. La ecaución $g(x) = x$ tiene dos soluciones, 0 y 1, de las cuales sólo una pertenece al intervalo $[0.64, 1.44]$. Resumen: el punto fijo es 1.

V. El punto fijo se puede aproximar con el método de iteración simple, empezando con cualquier punto x_0 del intervalo $[0.64, 1.44]$. Hagamos 5 iteraciones empezando con $x_0 = 0.64$:

$$\begin{aligned}
x_0 &:= 0.64;\\
x_1 &:= \sqrt{x_0} = 0.8;\\
x_2 &:= \sqrt{x_1} \approx 0.894427;\\
x_3 &:= \sqrt{x_2} \approx 0.945742;\\
x_4 &:= \sqrt{x_3} \approx 0.986150;\\
x_5 &:= \sqrt{x_4} \approx 0.993051.
\end{aligned}$$

□

3. Ejemplo. Consideramos la función

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$$

en el intervalo $[1.5, 3]$.

Calculamos su derivada:

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{x^2}\right) = \frac{x^2 - 4}{2x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}.$$

Se ve que g' es una función creciente; también es fácil comprobarlo con la segunda derivada:

$$g''(x) = \frac{4}{x^3} > 0.$$

Como g' es creciente,

$$\min_{x\in[1.5,3]} g'(x) = g'(1.5) = \frac{2.25 - 4}{2 \cdot 2.25} = -\frac{7}{18}, \qquad \max_{x\in[1.5,3]} g'(x) = g'(3) = \frac{9-4}{2 \cdot 9} = \frac{5}{18}.$$

Calculamos C como el máximo valor absoluto de g':

$$C \coloneqq \max_{x\in[1.5,3]} |g'(x)| = \max\left\{\left|-\frac{7}{18}\right|, \left|\frac{5}{18}\right|\right\} = \frac{7}{18}.$$

La constante C satisface la condición $C < 1$. Ahora vamos a calcular $g([1.5, 3])$. Notemos que g' se anula en el punto 2, por eso es suficiente calcular los valores de g en el punto 2 y en los extremos del intervalo:

$$g(1.5) = \frac{25}{12}, \qquad g(2) = 2, \qquad g(3) = \frac{13}{6}.$$

De aquí

$$\min_{x\in[1.5,3]} g(x) = 2, \qquad \max_{x\in[1.5,3]} g(x) = \frac{13}{6}, g([1.5, 3]) = \left[2, \frac{13}{6}\right] \subset [1, 3].$$

Acabamos de verificar que se cumplen las condiciones del teorema. Calculemos las primeras 5 iteraciones empezando con el punto $x_0 = 3$:

$$\begin{aligned} x_0 &= 3; \\ x_1 &= g(x_0) \approx 2.166666667; \\ x_2 &= g(x_1) \approx 2.006410256; \\ x_3 &= g(x_2) \approx 2.000010240; \end{aligned}$$

Para $k = 4, 5, \ldots$ los valores de x_k ya están muy cerca del punto fijo 2.

En los siguientes ejercicios hay que mostrar que se cumplen las condiciones del teorema del punto fijo, y luego calcular x_k para $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

4. Ejercicio. $[a, b] = [1, 3]$, $\quad g(x) = 2 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4}$.

5. Ejercicio. $[a, b] = [1, 2]$, $\quad g(x) = \cos(x)$, $\quad x_0 = 1$.

6. Ejercicio. $[a, b] = [0.4, 1]$, $\quad g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x}}$, $\quad x_0 = 1$.