Propagación de errores

Por lo común los datos iniciales de los cálculos contienen errores (como errores experimentales tanto errores de redondeo en los cálculos anteriores). En cada paso estos errores se propagan y además se aumentan por los errores de redondeo.

1. Teorema (error absoluto de la suma). Sean p y q algunos números y sean $\widetilde{p}$ y $\widetilde{q}$ algunas aproximaciones de p y q. Entonces

$$\operatorname{EA}(\widetilde{p+q}, p+q) \le \operatorname{EA}(\widetilde{p}, p) + \operatorname{EA}(\widetilde{q}, q),$$

donde $\widetilde{p+q}$ es $\widetilde{p} + \widetilde{q}$.

Demostración. El resultado sigue fácilmente de la desigualdad triangular (es decir, de la propiedad subaditiva del valor absoluto):

$$\begin{aligned} \operatorname{EA}(\widetilde{p+q}, p+q) &= |\widetilde{p+q} - (p+q)| = |\widetilde{p} + \widetilde{q} - p - q| = |\widetilde{p} - p + \widetilde{q} - q| \\ &\le |\widetilde{p} - p| + |\widetilde{q} - q| = \operatorname{EA}(\widetilde{p}, p) + \operatorname{EA}(\widetilde{q}, q). \end{aligned} \qquad \square$$

2. Teorema (error relativo del producto). Sean p y q algunos números no nulos y sean $\widetilde{p}$ y $\widetilde{q}$ algunas aproximaciones de p y q. Entonces

$$\operatorname{ER}(\widetilde{pq}, pq) \le \operatorname{ER}(\widetilde{p}, p) + \operatorname{ER}(\widetilde{q}, q) + \operatorname{ER}(\widetilde{p}, p) \operatorname{ER}(\widetilde{q}, q), \tag{1}$$

donde $\widetilde{pq} = \widetilde{p}\widetilde{q}$.

Demostración. Primero acotemos por arriba el error absoluto:

$$\begin{aligned} \operatorname{EA}(\widetilde{pq}, pq) &= |\widetilde{p}\widetilde{q} - pq| \\ &= |(\widetilde{p} - p + p)(\widetilde{q} - q + q) - pq| \\ &= |(\widetilde{p} - p)(\widetilde{q} - q) + (\widetilde{p} - p)q + (\widetilde{q} - q)p| \\ &\le |\widetilde{p} - p|\ |\widetilde{q} - q| + |\widetilde{p} - p|\ |q| + |\widetilde{q} - q|\ |p| \\ &= q \operatorname{EA}(\widetilde{p}, p) + p \operatorname{EA}(\widetilde{q}, q) + \operatorname{EA}(\widetilde{p}, p) \operatorname{EA}(\widetilde{q}, q). \end{aligned}$$

Al dividir entre $|pq|$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{ER}(\widetilde{pq}, pq) &= \frac{|\operatorname{EA}(\widetilde{pq}, pq)|}{|pq|} \\ &\le \frac{\operatorname{EA}(\widetilde{p}, p)}{|p|} + \frac{|\operatorname{EA}(\widetilde{q}, q)|}{|q|} + \frac{|\operatorname{EA}(\widetilde{p}, p)|}{|p|} \frac{|\operatorname{EA}(\widetilde{q}, q)|}{|q|} \\ &= \operatorname{ER}(\widetilde{p}, p) + \operatorname{ER}(\widetilde{q}, q) + \operatorname{ER}(\widetilde{p}, p) \operatorname{ER}(\widetilde{q}, q). \end{aligned} \qquad \square$$

3. Observación. Por lo común, los errores relativos $\mathrm{ER}(\widetilde{p}, p)$ y $\mathrm{ER}(\widetilde{q}, q)$ son mucho menores que 1, y su producto $\mathrm{ER}(\widetilde{p}, p)\,\mathrm{ER}(\widetilde{q}, q)$ es mucho menor que $\mathrm{ER}(\widetilde{p}, p)$ y $\mathrm{ER}(\widetilde{q}, q)$. Por eso tenemos una fórmula aproximada simple para el segundo miembro de (1):

$$\mathrm{ER}(\widetilde{p}, p) + \mathrm{ER}(\widetilde{q}, q) + \mathrm{ER}(\widetilde{p}, p)\,\mathrm{ER}(\widetilde{q}, q) \approx \mathrm{ER}(\widetilde{p}, p) + \mathrm{ER}(\widetilde{q}, q).$$

4. Ejercicio. Deduzca una cota superior para el valor absoluto de la resta.

5. Ejercicio. Deduzca una cota superior para el valor relativo del cociente.

6. Ejemplo. Calcular el área de un cuarto, si se saben sus tamaños:

$$a = 2.67m \pm 0.01m; \qquad b = 3.42 \pm 0.01m.$$

Solución (I método). Calculemos valor mínimo posible de S y valor máximo posible:

$$S_{\min} = a_{\min} \cdot b_{\min} = 2.66 \cdot 3.41 = 9.0706 \approx 9.07;$$
$$S_{\max} = a_{\max} \cdot b_{\max} = 2.68 \cdot 3.43 = 9.1924 \approx 9.19.$$

De allí $S \approx 9.13 \pm 0.06$ (m^2).

Solución (II método). Calculemos errores relativos de a y b:

$$\mathrm{ER}(\widetilde{a}, a) \le \frac{0.01}{2.67} \approx 0.0037, \quad \mathrm{ER}(\widetilde{b}, b) \le \frac{0.01}{3.42} \approx 0.0029.$$

De allí $S \approx 9.1314 \approx 9.13$,

$$\mathrm{ER}(\widetilde{S}, S) \le \mathrm{ER}(\widetilde{a}, a) + \mathrm{ER}(\widetilde{b}, b) \approx 0.0066, \qquad \mathrm{EA}(\widetilde{S}, S) \le 9.13 \cdot 0.0066 \approx 0.06.$$

Obtenemos el mismo resultado: $S \approx 9.13 \pm 0.06$ (m^2).

7. Ejercicio. Calcule la velocidad promedia v de un ciclista, si se saben la longitud del camino y el tiempo del movimiento:

$$L = 130.2 \text{ km } \pm 0.1 \text{ km}, \qquad t = 8 \text{ h } 20 \text{ min} \pm 5 \text{ min}.$$

Indicación: convertir minutos en horas.