Órdenes de la convergencia de sucesiones. Condiciones de la convergencia lineal y cuadrática del método de iteración simple

Estos apuntes están redactados por Maria de los Angeles Isidro Pérez y Egor Maximenko.

Objetivos. Definir el orden de convergencia de una sucesión a su límite.

Requisitos. Límite de una sucesión, método del punto fijo, teorema del valor medio, fórmula de Taylor.

1. Definición (orden de convergencia). Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión que converge a b, con $a_n \neq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y sean $\alpha > 0$ y $\lambda > 0$. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} - b|}{|a_n - b|^{\alpha}} = \lambda,$$

entonces se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a b con *orden* α y una *constante de error asintótica* λ.

2. Definición (convergencia lineal y cuadrática). Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión convergente. Se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$:

- *converge linealmente*, si el orden de la convergencia es 1;
- *converge cuadráticamente*, si el orden de la convergencia es 2.

3. Ejemplo. Consideremos las sucesiones $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ definidas mediante las siguientes reglas:

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = 0.3a_n; \qquad\qquad c_0 = 1, \qquad c_{n+1} = 0.6 \cdot c_n^2.$$

Claramente ambas sucesiones convergen a 0. Calcular a_n y c_n para $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Calcular

$$N_1 := \min\{n\colon a_n < 10^{-6}\}, \qquad N_2 := \min\{n\colon c_n < 10^{-6}\}.$$

Solución. Calculemos $a_1, \ldots, a_5$:

$$a_1 = 0.3, \qquad a_2 = 0.09, \qquad a_3 = 0.027, \qquad a_4 = 0.0081 \qquad , a_5 = 0.00243$$

Resolvemos la desigualdad $a_n < 10^{-6}$:

$$\begin{aligned} a_n < 10^{-6} \quad &\iff \quad 0.3^n < 10^{-6} \quad &\iff \quad n\ln(0.3) < -6\ln(10) \\ &\iff \quad n > 11.4 \quad &\iff \quad n \geq 12, \end{aligned}$$

así que $N_1 = 12$.

Calculemos $c_1, \ldots, c_5$:

$$c_1 = 0.6, \qquad c_2 \approx 2.2 \cdot 10^{-1}, \qquad c_3 \approx 2.8 \cdot 10^{-2}, \qquad c_4 \approx 4.7 \cdot 10^{-4}, \qquad c_5 \approx 1.32 \cdot 10^{-7}.$$

Se ve que c_n es decreciente y $N_2 = 5$. □

4. Ejercicio. Muestre que cada una de las siguientes sucesiones converge linealmente al número 0:

$$\frac{1}{n}, \qquad \frac{1}{n^3}, \qquad \frac{1}{2^n}.$$

5. Ejercicio. Muestre que la sucesión 3^{-2^n} converge cuadráticamente a 0.

6. Ejemplo simple de una sucesión que converge a 0 linealmente. Sea $\lambda \in (0,1)$. Hallar la fórmula general para la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida por:

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = \lambda x_n.$$

Solución. El n-ésimo término de la sucesión está dado por:

$$x_n = \lambda^n.$$ □

7. Ejemplo simple de una sucesión que converge a 0 cuadráticamente. Sea $\lambda \in (0,1)$. Hallar la fórmula general para la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida por:

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = \lambda (x_n)^2.$$

Solución. El n-ésimo término de la sucesión está dado por:

$$x_n = \lambda^{2^n - 1}.$$ □

Multiplicidad del cero de una función

8. Definición (multiplicidad del cero). Se dice que el cero p de la función f tiene *multiplicidad* m ($m \in \{1, 2, 3, \ldots\}$) si la función f se puede escribir en forma

$$f(x) = (x - p)^m g(x) \qquad (x \neq p),$$

donde $\lim\limits_{x \to p} g(p) \neq 0$.

9. Criterio de cero simple. Sea $f \in C^1[a, b]$ y sea $p \in (a, b)$. Entonces f tiene un cero simple (de multiplicidad 1) en p si, y sólo si,

$$f(p) = 0 \qquad \text{y} \qquad f'(p) \neq 0.$$

10. Criterio de cero de multiplicidad m. Sea $f \in C^m[a, b]$ y sea $p \in (a, b)$. Entonces p es un cero de f de multilicidad m si y sólo si:

$$f(p) = 0, \quad f'(p) = 0, \quad \ldots, \quad f^{(m-1)}(p) = 0, \quad f^{(m)}(p) \neq 0.$$

11. Ejemplo. Calcular la multiplicidad de cero de $f(x) = e^x - x - 1$ en el punto $p = 0$.

Solución. Calculamos las dos primeras derivadas:

$$f'(x) = e^x - 1, \qquad f''(x) = e^x.$$

Ahora evaluamos las funciones f, f' y f'' en el punto $p = 0$:

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 0, \qquad f''(0) = 1.$$

Por el criterio, $p = 0$ es un cero de multiplicidad $m = 2$. □

12. Ejercicio. Calcular la multiplicidad de cero de f en el punto $p = 0$:

1. $f(x) = \cos x - 1$.
2. $f(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x$.

Condiciones suficientes de la convergencia lineal y cuadrática del método de punto fijo

13. Teorema (condición suficiente para la convergencia lineal). Sea $g \in C^1[a,b]$ tal que $g[a,b] \subseteq [a,b]$ y $|g'(x)| \leq k$ para todo $x \in [a,b]$, donde $k \in (0,1)$. Denotemos por p el punto fijo de g en el intervalo $[a,b]$. Si $g'(p) \neq 0$, entonces para cualquier $x_0 \in [a,b]\setminus\{p\}$ la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida por la fórmula recursiva $x_n = g(x_{n-1})$ converge linealmente a p.

Demostración. Por la definición de x_{n+1} y p,

$$|x_{n+1} - p| = |g(x_n) - g(p)|.$$

El teorema del valor medio aplicado a la función f en el intervalo con extremos x_n y p nos da un punto ξ_n entre x_n y p tal que

$$|g(x_n) - g(p)| = |g'(\xi_n)| \cdot |x_n - p|,$$

Como ξ_n está entre x_n y p, tenemos que $|\xi_n - p| \leq |x_n - p|$ y $\xi_n \to p$. En la igualdad

$$\frac{|x_{n+1} - p|}{|x_n - p|} = |g'(\xi_n)|.$$

pasemos al límite cuando $n \to \infty$. Como $\xi_n \to p$ y g' es continua, $g'(\xi_n) \to g'(p)$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - p|}{|x_n - p|} = |g'(p)|. \qquad \square$$

14. Teorema (condición suficiente para la convergencia cuadrática). Sea p una solución de la ecuación $x = g(x)$. Supongamos que $g'(p) = 0$, g'' es continua y existe un intervalo abierto I tal que $p \in I$ y

$$\sup_{x\in I} |g''(x)| < M.$$

Entonces existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x_0 \in [p - \delta, p + \delta]$ la sucesión $\{x_n\}$ definida por $x_n = g(x_{n-1})$ converge al menos cuadráticamente a p. Además, para los valores suficientemente grandes de n,

$$|p_{n+1} - p_n| < \frac{M}{2}|p_n - p|^2.$$

Demostración. Escribamos la fórmula de Taylor para g:

$$g(x) = g(p) + g'(p)(x - p) + \frac{g''(\xi)}{2}(x - p)^2.$$

Aquí $g(p) = p$, $g'(p) = 0$. Poniendo $x = x_n$, obtenemos:

$$x_{n+1} = p + \frac{g''(\xi_n)}{2} \cdot (x_n - p)^2,$$

donde ξ_n está entre p y x_n.

$$\frac{|x_{n+1} - p|}{|x_n - p|^2} = \frac{g''(\xi_n)}{2} \to \frac{g''(p)}{2}. \qquad \square$$

15. Ejercicio: deducción del método de Newton como un caso particular del método de punto fijo. Para la búsqueda de raíces de la ecuación $f(x) = 0$, consideremos un problema de punto fijo con la función g de la forma $g(x) = x - f(x)h(x)$. Para tener $g'(p) = 0$ en el punto p donde $f(p) = 0$, necesitamos $h(p) = 1/f'(p)$. Es natural pedir $h(x) = 1/f'(x)$, y en esta manera obtenemos el método de Newton. Complete los razonamientos.

16. Ejercicio. Muestre que la sucesión $\{x_n\}$, definida por:

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n},$$

converge a 2, y calcular el orden de la convergencia.

i) Para calcular el límite, pase al límite en la igualdad $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$.

ii) Para demostrar que el límite efectivamente existe y calcular el orden de la convergencia, exprese $|x_{n+1} - 2|$ a través de $|x_n - 2|$.

17. Ejercicio: orden de la convergencia en el algoritmo babilónico para el cálculo de la raíz cuadrada. Sea $c > 1$. Usando la definición del orden de convergencia, muestre que la sucesión $\{x_n\}$ definida por:

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right),$$

converge cuadráticamente a $\sqrt{c}$. Sugerencia: exprese $|x_{n+1} - \sqrt{c}|$ a través de $|x_n - \sqrt{c}|$.