Polinomios básicos de Lagrange

Objetivos. Estudiar la construcción y las propiedades principales de los polinomios básicos de Lagrange.

Requisitos. Teorema del resto, construcción de polinomios con raíces dadas, algoritmo de multiplicación de un polinomio por un binomio.

Forma general del polinomio con raíces dadas (repaso)

1. División de un polinomio entre un binomio (repaso). Sea P un polinomio y sea x_0 un número. Entonces se puede construir un único polinomio Q y un único número r tales que

$$P(x) = (x - x_0)Q(x) + r. \tag{1}$$

En el inicio del curso dedujimos un algoritmo para calcular los coeficientes de Q y el residio r.

2. Teorema del resto (repaso). En la fórmula (1) el número r coincide con el valor del polinomio P en el punto x_0:

$$P(x_0) = r.$$

La demostración es trivial: sustituir x por x_0 en ambos lados de (1) y notar que $(x_0 - x_0)Q(x_0) = 0$.

3. Corolario del teorema del resto (repaso). El polinomio P se divide sin residuo entre el binomio $x - x_0$ si y sólo si $P(x_0) = 0$.

4. Factorización de un polinomio que tiene dos raíces diferentes. Supongamos que P es un polinomio y que x_1, x_2 son dos números diferentes tales que $P(x_1) = 0$ y $P(x_2) = 0$. Primero notamos que P se divide sin residuo entre el binomio $x - x_1$, es decir, existe un polinomio Q_1 tal que

$$P(x) = (x - x_1)Q_1(x).$$

Evaluamos ambos lados de esta igualdad en el punto x_2: $P(x_2) = (x_2 - x_1)Q_1(x_2)$. Como $P(x_2) = 0$ y $x_2 - x_1 \neq 0$, obtenemos que $Q_1(x_2) = 0$. Entonces Q_1 se divide sin residuo entre el binomio $x - x_2$, es decir, existe un polinomio Q_2 tal que

$$Q_1(x) = (x - x_2)Q_2(x).$$

Por lo tanto,

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)Q_2(x).$$

5. Proposición sobre la factorización de un polinomio con raíces dadas. Sea P un polinomio que tiene raíces diferentes $x_1, \ldots, x_m$. Entonces existe un polinomio Q tal que

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m) Q(x).$$

En particular, si $\deg(P) \le m$, entonces Q es una constante:

$$P(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m).$$

La idea de demostración está explicada arriba para el caso particular $m = 2$.

Polinomios básicos de Lagrange

6. Ejemplo. Sean x_1, x_2, x_3 algunos tres números diferentes a pares. Vamos a construir un polinomio L_1 de grado 2 tal que

$$L_1(x_1) = 1, \qquad L_1(x_2) = 0, \qquad L_1(x_3) = 0.$$

Aplicamos la Proposición 5. Para anularse en los puntos x_2 y x_3 y ser de grado 2 el polinomio L_1 debe ser de la forma

$$L_1(x) = c(x - x_2)(x - x_3).$$

Ahora elegimos c de tal manera que se cumpla la igualdad $L_1(x_1) = 1$:

$$1 = c(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}.$$

Respuesta:

$$L_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}.$$

7. Polinomios básicos de Lagrange L_j en el caso general. Sea

$$\boxed{L_j(x) = \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.}$$

En forma más extensa,

$$L_j(x) = \frac{(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_j - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (x_j - x_n)}.$$

Entonces $L_j(x_j) = 1$ y $L_j(x_k) = 0$ si $k \ne j$. En otras palabras,

$$\boxed{L_j(x_k) = \delta_{j,k} \qquad (1 \le j, k \le n).}$$

8. Componga un algoritmo que calcule los coeficientes del polinomio L_j. La entrada del algoritmo es la lista de números $x_1, \ldots, x_n$ diferentes a pares y un número $j \in \{1, \ldots, n\}$. Calcule el número de operaciones en este algoritmo.