Error absoluto, error relativo y cifras significativas

1. Definición (error absoluto). Si $\tilde{p}$ es una aproximación de p, entonces el *error absoluto* se define como $|p - \tilde{p}|$. Notación: $\mathrm{EA}(p)$.

2. Definición (error relativo). Si $\tilde{p}$ es una aproximación de p, donde $p \neq 0$, entonces el *error relativo* es $\dfrac{|p-\tilde{p}|}{|p|}$. Notación: $\mathrm{ER}(p)$.

3. Ejemplo. Calcular el error absoluto y el error relativo:

$$\text{a) } p = 0.4, \qquad \tilde{p} = 0.41; \qquad\qquad \text{b) } p = 40, \qquad \tilde{p} = 41.$$

4. Definición (número de cifras significativas). El número $\tilde{p}$ aproxima a p con t *cifras significativas* si t es el mayor entero no negativo para el cual

$$\frac{|p-\tilde{p}|}{|p|} < 5 \cdot 10^{-t}.$$

5. Ejemplo. Calcular el error absoluto, el error relativo y el número de cifras significativas:

$$p = e, \qquad \tilde{p} = 2.72.$$

6. Calcular el error absoluto y el error relativo el las aproximaciones de p mediante $\tilde{p}$:

$$\text{a) } p = 0.3,\ \tilde{p} = 0.31; \qquad \text{b) } p = 300,\ \tilde{p} = 310.$$

7. Calcule el error absoluto, el error relativo y el número de cifras significativas en las aproximaciones de $p = \pi$ mediante $\tilde{p}$:

- $\tilde{p} = 22/7$ (en Antiguo Egipto, siglo XXVI a. C.)
- $\tilde{p} = 223/71$ (Arqúimedes, Antigua Grecia, siglo III a. C.)
- $\tilde{p} = 3.14159$ (Liu Hui, China, año 265).
- $\tilde{p} = 355/113$ (Zu Chongzhi, China, año 480).

8. Ejemplo. Determine el mayor intervalo en que debe estar $\tilde{p}$ para aproximar p con un error relativo de a lo sumo 10^{-4} para cada valor de p:

$$\text{a) } p = \pi; \qquad \text{b) } p = \sqrt[3]{7}.$$

Solución. a) $p = \pi$, $\mathrm{ER}(p) \le 10^{-4}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{EA}(p) &\le \pi \cdot 10^{-4} \approx 3.14159 \approx 0.00031; \\ p_{\min} &= 3.14159 - 0.00031 = 3.14128; \\ p_{\max} &= 3.14159 + 0.00031 = 3.14190. \end{aligned}$$

b) $p = \sqrt[3]{7}$, $\mathrm{ER}(p) \le 10^{-4}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{EA}(p) &\le \sqrt[3]{7} \cdot 10^{-4} \approx 1.91293 \cdot 10^{-4} = 0.00019; \\ p_{\min} &= 1.91293 - 0.00019 = 1.91274; \\ p_{\max} &= 1.91293 + 0.00019 = 1.91312. \end{aligned}$$

□

9. Determine el mayor intervalo en que debe estar $\tilde{p}$ para aproximar p con un error relativo de a lo sumo 10^{-4} para cada valor de p:

$$\text{a) } p = e; \qquad \text{b) } p = \sqrt{2}.$$

10. Ejemplo. Determinar el mayor intervalo en que debe estar $\tilde{p}$ para aproximar p con al menos dos cifras significativas:

$$a)\ p = \sqrt{3}; \qquad b)\ p = \ln 3.$$

Solución. a) $p = \sqrt{3}$, $\mathrm{ER}(p) < 5 \cdot 10^{-2}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{EA}(p) &= p \cdot \mathrm{ER}(p) \approx 1.732 \cdot 0.05 \approx 0.087. \\ \tilde{p}_{\min} &= \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot 0.05 \approx 1.732 - 0.087 = 1.645; \\ \tilde{p}_{\max} &= \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot 0.05 \approx 1.732 + 0.087 = 1.819. \end{aligned}$$

b) $p = \ln 3$, $\mathrm{ER}(p) < 5 \cdot 10^{-2}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{EA}(p) &= \ln 3 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \approx 1.099 \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 0.055; \\ \tilde{p}_{\min} &= \ln 3 - \ln 3 \cdot 0.05 \approx 1.099 - 0.055 = 1.044; \\ \tilde{p}_{\max} &= \ln 3 + \ln 3 \cdot 0.05 \approx 1.099 + 0.055 = 1.154. \end{aligned}$$

□

11. Determine el mayor intervalo en que debe estar $\tilde{p}$ para aproximar p con al menos dos cifras significativas:

$$a)\ p = \sqrt{2}, \qquad b)\ p = \pi.$$