Interpolación de Newton en diferencias regresivas

Objetivos. Estudiar la contrucción del polinomio interpolante a través de las diferencias regresivas en el caso cuando las abscisas de los nodos de interpolación son equidistantes.

Requisitos. Diferencias regresivas de una sucesión, diferencias divididas, fórmula de Newton para el polinomio interpolante, interpolación de Newton en diferencias progresivas.

1. Diferencias divididas (repaso). Sea f una función definida en algunos puntos diferentes a pares $x_0, x_1, x_2, \ldots$; denotemos por $y_0, y_1, y_2, \ldots$ sus valores en estos puntos. Entonces las diferencias divididas de f se definen mediante las siguientes fórmulas, de manera recursiva:

$$f[x_i] = f(x_i) = y_i, \qquad f[x_i, \ldots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_j] - f[x_i, \ldots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}.$$

Notemos que las diferencias divididas son funciones simétricas, es decir, no dependen del orden de los argumentos, por ejemplo,

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_2, x_1, x_0].$$

2. Fórmula de Newton para el polinomio interpolante (repaso). Recordemos la fórmula de Newton para el polinomio interpolante que coincide con la función f en los puntos x_i:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$

En esta sección vamos a ordenar los puntos en el sentido contrario. Apliquemos la fórmula de Newton a los puntos $x_n, \ldots, x_0$:

$$\begin{aligned} P(x) &= f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_{n-1}) \\ &\qquad + \ldots + f[x_n, \ldots, x_0](x - x_n) \cdot \ldots \cdot (x - x_1) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f[x_n, \ldots, x_{n-k}] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_{n-j}). \end{aligned}$$

3. El caso de puntos equidistantes. En esta sección se considera el caso particular cuando los puntos $x_0, \ldots, x_n$ son equidistantes:

$$x_k = x_0 + kh, \qquad 0 \le k \le n.$$

Vamos a escribir todo en términos del último punto x_n:

$$x_{n-k} = x_n - kh, \qquad 0 \le k \le n,$$

y hacer el cambio de variables $x = x_n + hs$.

4. Ejercicio: Expresión del producto a través de la variable nueva. Haga el cambio de variables $x = x_n + hs$ y exprese el siguiente producto a través de s y x_n:

$$\prod_{j=0}^{k-1}(x - x_{n-j}) = (x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-k+1}).$$

Primero puede considerar el caso particular $k = 3$:

$$(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) = \underbrace{\ldots}_{?} = h^3\, s(s+h)(s+2h)$$

$$= h^3\,(-1)^3\,(-s)(-s-h)(-s-2h) = 3!\, h^3\,(-1)^3 \binom{-s}{3}.$$

Para escribir la respuesta en forma corta use la notación del coeficiente binominal:

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdot \ldots \cdot (a-k+1)}{k!}.$$

5. Diferencias regresivas de una sucesión. Las diferencias regresivas de una sucesión $y_0, y_1, y_2, \ldots$ se definen de manera recursiva:

$$(\nabla^0 y)_i \coloneqq y_i, \qquad (\nabla^{k+1} y)_i \coloneqq (\nabla^k y)_i - (\nabla^k y)_{i-1}.$$

En particular,

$$(\nabla^1 y)_i \coloneqq (\nabla^0 y)_i - (\nabla^0 y)_{i-1} = y_i - y_{i-1},$$
$$(\nabla^2 y)_i \coloneqq (\nabla^1 y)_i - (\nabla^1 y)_{i-1} = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}.$$

6. Ejercicio: Expresión de las diferencias divididas a través de las diferencias progresivas. Los puntos x_i son equidistantes, por eso los denominadores de las diferencias divididas se escriben en términos de h y los numeradores en términos de las diferencias regresivas, por ejemplo

$$f[x_i, x_{i-1}] = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{(\nabla y)_i}{h}.$$

Las diferencias divididas de orden 2 se expresan a través de h y $(\nabla^2 y)_i$:

$$f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}] = \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots$$

Las diferencias divididas de orden 3 se escriben en términos de h y $(\nabla^3 y)_i$:

$$f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}, x_{i-3}] = \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots$$

Adivine la fórmula general, esto es, exprese $f[x_i, x_{i-1}, \ldots, x_{i-k+1}]$ a través de h y $(\nabla^k y)_i$:

$$[y_i, y_{i-1}, \ldots, y_{i-k+1}] =$$

7. Proposición (interpolación de Newton en diferencias regresivas). Sea P el polinomio de grado $\le n$ que toma valores $y_0, y_0 + h, \ldots, y_0 + nh$ en los puntos $x_0, x_0 + h, \ldots, x_0 + nh$. Entonces

$$P(x_n + hs) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} (\nabla^k y)_n. \tag{1}$$

Demostración. Partimos de la fórmula de Newton para el polinomio interpolante aplicada a los puntos $x_n, \ldots, x_0$ y los valores $y_n, \ldots, y_0$:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_n, \ldots, x_{n-k}] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_{n-j}). \tag{2}$$

Hacemos el cambio de variable $x = x_n + hs$ y escribimos el producto de los binomios $x - x_{n-j}$ en términos de la variable s:

$$\begin{aligned}
\prod_{j=0}^{k-1} (x - x_{n-j}) &= h^k\, s(s+1) \cdot \ldots \cdot (s+k-1) \\
&= (-1)^k\, h^k\, (-s)(-s-1) \cdot \ldots \cdot (-s-k+1) \\
&= (-1)^k\, k!\, h^k \binom{-s}{k}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Expresamos las diferencias divididas $f[x_n, \ldots, x_{n-k}]$ a través de las diferencias regresivas $(\nabla^k y)_n$:

$$f[x_n, \ldots, x_{n-k}] = \frac{1}{k!\, h^k} (\nabla^k y)_n. \tag{4}$$

Sustituyendo (3) y (4) en (2) obtenemos (1). $\square$

8. Ejemplo. Usando la interpolación de Newton en diferencias regresivas construya el polinomio P de grado ≤ 3, que tome en los puntos $-1, 1, 3, 5$ los valores $-7, 1, 1, 41$. Calcule el valor de este polinomio en el punto 2.

Solución. Tabla de las diferencias regresivas:

$$\begin{array}{llll}
(\nabla^0 y)_0 = y_0 = -7 & & & \\
& (\nabla^1 y)_1 = (\nabla^0 y)_1 - (\nabla^0 y)_0 = 8 & & \\
(\nabla^0 y)_1 = y_1 = 1 & & (\nabla^2 y)_2 = -8 & \\
& (\nabla^1 y)_2 = (\nabla^0 y)_2 - (\nabla^0 y)_1 = 0 & & (\nabla^3 y)_3 = 48 \\
(\nabla^0 y)_2 = y_2 = 1 & & (\nabla^2 y)_3 = 40 & \\
& (\nabla^1 y)_3 = (\nabla^0 y)_3 - (\nabla^0 y)_2 = 40 & & \\
(\nabla^0 y)_3 = y_3 = 41 & & &
\end{array}$$

Polinomio interpolante escrito con variable s:

$$\begin{aligned}
Q(s) = P(x_3 + 2s) &= \sum_{k=0}^{3} (-1)^k \binom{-s}{k} (\nabla^k y)_3 \\
&= (-1)^0 41 + 40(-1)^1 \frac{-s}{1} + 40(-1)^2 \frac{-s(-s-1)}{2} + 48(-1)^3 \frac{-s(-s-1)(-s-2)}{3!} \\
&= 41 + 40s + 20s(s+1) + 8s(s+1)(s+2) \\
&= \Big(\big(8(s+2) + 20\big)(s+1) + 40\Big)s + 41.
\end{aligned}$$

Calculamos $Q(s)$ por pasos:

	8
$\times(s+2)$	$8s+16$
$+20$	$8s+36$
$\times(s+1)$	$8s^2+44s+36$
$+40$	$8s^2+44s+76$
$\times s$	$8s^3+44s^2+76s$
$+41$	$8s^3+44s^2+76s+41$

Así que

$$Q(s) = P(5+2s) = 8s^3 + 44s^2 + 76s + 41.$$

Con esta fórmula ya podemos evaluar P en el punto $x = 2$. De la igualdad $5 + 2s = 2$ despejamos $s = -\frac{3}{2}$ y calculamos $Q(-3/2)$:

	8	44	76	41
$-3/2$	8	32	28	-1

$$P(2) = Q(-3/2) = -1.$$

Ahora expresamos el polinomio interpolante en términos de la variable x. Para hacerlo exresamos s a través de x:

$$x = 5 + 2s \qquad \Longrightarrow \qquad s = \frac{x-5}{2},$$

y sustituimos esta expresión en Q:

$$P(x) = Q\left(\frac{x-5}{2}\right) = (x-5)^3 + 11(x-5)^2 + 38(x-5) + 41$$
$$= \Big(\big(1 \cdot (x-5) + 11\big)(x-5) + 38\Big)(x-5) + 41.$$

Por pasos:

	1
$\times(x-5)$	$x-5$
$+11$	$x+6$
$\times(x-5)$	x^2+x-30
$+38$	x^2+x+8
$\times(x-5)$	$x^3-4x^2+3x-40$
$+41$	x^3-4x^2+3x+1

Respuesta:

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1.$$

Para comprobación calculemos $P(2)$ usando los coeficientes de P:

	1	-4	3	1
2	1	-2	-1	-1

$P(2) = -1$ ✓ □