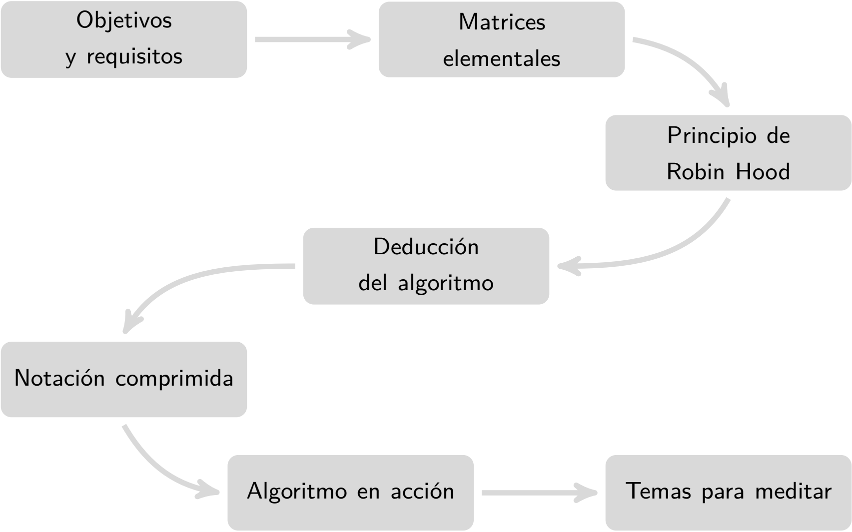
Factorización LU: explicación por medio de matrices elementales

Egor Maximenko,
con correcciones de Juan Carlos González Rodríguez

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

26 de diciembre de 2014

Contenido



Objetivos y requisitos
Matrices elementales
Principio de Robin Hood
Deducción del algoritmo
Notación comprimida
Algoritmo en acción
Temas para meditar

Contenido

Objetivo

Dada una matriz cuadrada A,
construir un par de matrices cuadradas L y U tales que:

1. $A = LU$,
2. L es unitriangular inferior,
3. U es triangular superior.

Ejemplo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 4 \\ 8 & 17 & -13 & 14 \\ -2 & -5 & -14 & -9 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Objetivo

Vamos a deducir y practicar un algoritmo para construir L y U. Con la matriz A de la página anterior el algoritmo funciona así (ahora no lo explicamos):

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 4 \\ 8 & 17 & -13 & 14 \\ -2 & -5 & -14 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 \mathrel{+}= R_1]{\substack{R_2 \mathrel{+}= -R_1 \\ R_3 \mathrel{+}= -4R_1}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 4 \\ 4 & -3 & -5 & 14 \\ -1 & 0 & -16 & -9 \end{bmatrix}$$

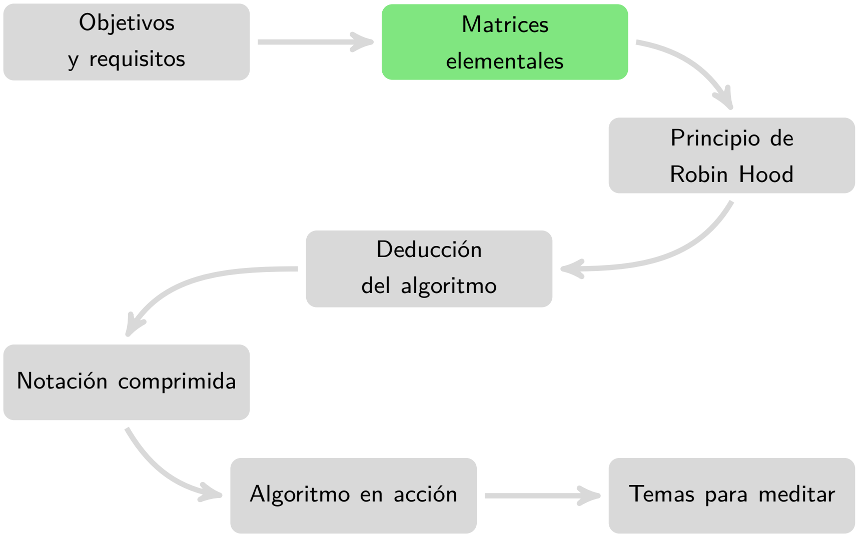
$$\xrightarrow{\substack{R_3 \mathrel{+}= -3R_2 \\ (R_4 \mathrel{+}= 0R_2)}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -16 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \mathrel{+}= 4R_3} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Requisitos para comprender bien esta presentación

1. Matrices triangulares y sus propiedades.
2. Matrices unitriangulares.
3. Operaciones elementales por renglones de tipo $R_q += \lambda R_p$.
4. Operaciones elementales por columnas de tipo $C_q += \lambda C_p$.
5. Matrices elementales que corresponden a la operación $R_q += \lambda R_p$.
6. Multiplicación por matrices elementales del lado izquierdo.
7. Multiplicación por matrices elementales del lado derecho.
8. Matrices inversas a las matrices elementales.

Los ejemplos de esta sección sólo indican los prerrequisitos necesarios y **no son suficientes** para entrar al tema.

Contenido


Objetivos y requisitos
Matrices elementales
Principio de Robin Hood
Deducción del algoritmo
Notación comprimida
Algoritmo en acción
Temas para meditar

Operación elemental mul-ad por renglones (filas)

Ejemplo

Al primer renglón de la matriz sumarle el tercero multiplicado por -2:

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 \\ -6 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \mathrel{+}= -2R_3} \begin{bmatrix} -1 & -9 & 11 \\ -6 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & -7 \end{bmatrix}.$$

El tercer renglón no se modifica.

Ejemplo

A la tercera fila de la matriz sumarle la segunda multiplicada por 7:

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -7 & -5 \\ -7 & -2 & 4 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \mathrel{+}= 7R_2} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -7 & -5 \\ -7 & -44 & -45 & -31 \\ 2 & -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Operación elemental mul-ad por columnas

Ejemplo

A la tercera columna de la matriz sumarle la primera multiplicada por 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \\ -5 & -3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_3 \mathrel{+}= 4\,C_1} \begin{bmatrix} 1 & -7 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -5 & -3 & -15 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo

A la segunda columna de la matriz sumarle la cuarta multiplicada por -1:

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & -7 & -3 \\ 4 & 3 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & -6 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2 \mathrel{+}= -C_4} \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 & -4 \\ -4 & 4 & -7 & -3 \\ 4 & 3 & 4 & 0 \\ -3 & 9 & -6 & -7 \end{bmatrix}.$$

Matrices elementales

Se obtienen de la matriz identidad al aplicar una operación elemental.
En este tema trabajamos sólo con operaciones elementales de tipo mul-ad.

Ejemplo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_3} \xrightarrow{R_3 \mathrel{+}= -7R_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{una matriz elemental}}.$$

Ejemplo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_4} \xrightarrow{R_2 \mathrel{+}= 2R_3} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{una matriz elemental}}.$$

Multiplicación por matrices elementales del lado izquierdo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -11 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}}_{B}.$$

Se ve que la matriz B se obtiene de la matriz A al aplicar la operación elemental $R_2 += -3R_1$:

$$A \xrightarrow{R_2 += -3R_1} B.$$

En otras palabras, multiplicar A por E del lado **izquierdo** fue lo mismo que hacer con los **renglones** de A la operación elemental $R_2 += -3R_1$.

Multiplicación por matrices elementales del lado izquierdo

Ejercicio

$$\underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} 20 & 30 & -30 \\ 3 & -1 & 7 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 12 & 34 & -40 \\ 3 & -1 & 7 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}}_{B}.$$

Antes de pasar a la siguiente página escriba en papel la operación elemental $A \xrightarrow{?} B$ y la matriz E.

Multiplicación por matrices elementales del lado izquierdo

Ejercicio

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} 20 & 30 & -30 \\ 3 & -1 & 7 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 12 & 34 & -40 \\ 3 & -1 & 7 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}}_{B}.$$

$$A \xrightarrow{R_1 \mathrel{+}= 2R_3} B$$

Multiplicación por matrices elementales del lado derecho

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 17 & -4 & 6 \\ 1 & -4 & 2 & -3 \\ 4 & 18 & 1 & 6 \\ -2 & 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}}_{B}.$$

Se ve que

$$A \xrightarrow{C_2 \mathrel{+}= 3C_4} B.$$

En este ejemplo, multiplicar A por E del lado **derecho** fue lo mismo que hacer con las **columnas** de A la operación elemental $C_2 \mathrel{+}= 3C_4$.

Multiplicación por matrices elementales del lado derecho

Ejercicio

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 5 & 40 \\ 1 & 0 & -10 \\ 1 & 2 & 40 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{E} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 5 & 48 \\ 1 & 0 & -14 \\ 1 & 2 & 36 \end{bmatrix}}_{B}.$$

Antes de pasar a la siguiente página escriba en papel
la operación elemental $A \xrightarrow{?} B$ y la matriz E.

Multiplicación por matrices elementales del lado derecho

Ejercicio

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 5 & 40 \\ 1 & 0 & -10 \\ 1 & 2 & 40 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 5 & 48 \\ 1 & 0 & -14 \\ 1 & 2 & 36 \end{bmatrix}}_{B}.$$

$$A \xrightarrow{C_3 \mathrel{+}= -4C_1} B$$

Matrices inversas de las matrices elementales

Ejemplo

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En efecto, el producto de estas dos matrices es

$$\begin{bmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+1+0 & 0+1+0 & 0-5+5 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{bmatrix} = I_3.$$

Ejemplo

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrices inversas de las matrices elementales

Ejercicio

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} =$$

Antes de pasar a la siguiente página escriba en papel la matriz E^{-1}.

Matrices inversas de las matrices elementales

Ejercicio

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrices inversas de las matrices elementales

Ejercicio

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} =$$

Antes de pasar a la siguiente página escriba en papel la matriz E^{-1}.

Matrices inversas de las matrices elementales

Ejercicio

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrices inversas de las matrices elementales

Ejercicio

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} =$$

Antes de pasar a la siguiente página escriba en papel la matriz E^{-1}.

Matrices inversas de las matrices elementales

Ejercicio

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrices inversas de las matrices elementales

Ejercicio

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} =$$

Antes de pasar a la siguiente página escriba en papel la matriz E^{-1}.

Matrices inversas de las matrices elementales

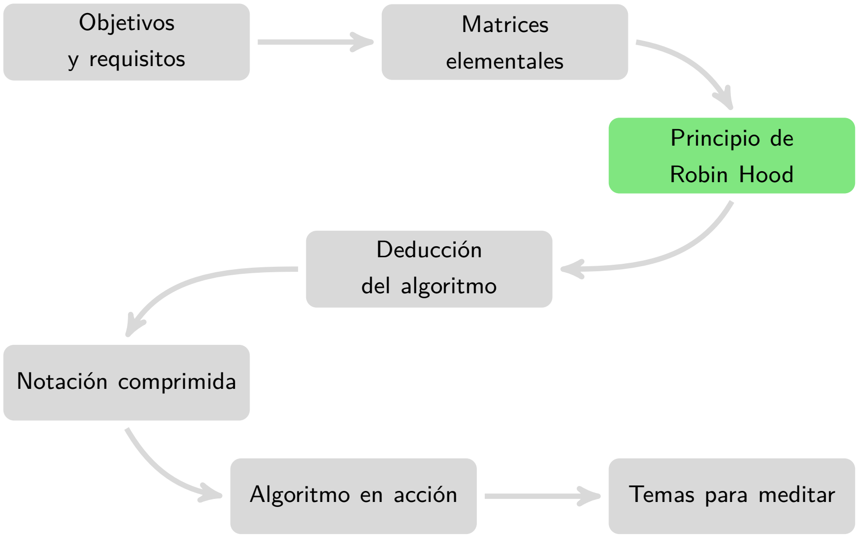
Ejercicio

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Contenido


Objetivos y requisitos
Matrices elementales
Principio de Robin Hood
Deducción del algoritmo
Notación comprimida
Algoritmo en acción
Temas para meditar

Robin Hood del bosque matricial

En matemáticas se usa frecuentemente una idea que se puede enunciar así:

Quitarle a los ricos y darle a los pobres.

En forma aditiva esto significa *restar y sumar*, por ejemplo:

$$a + b = a - c + c + b.$$

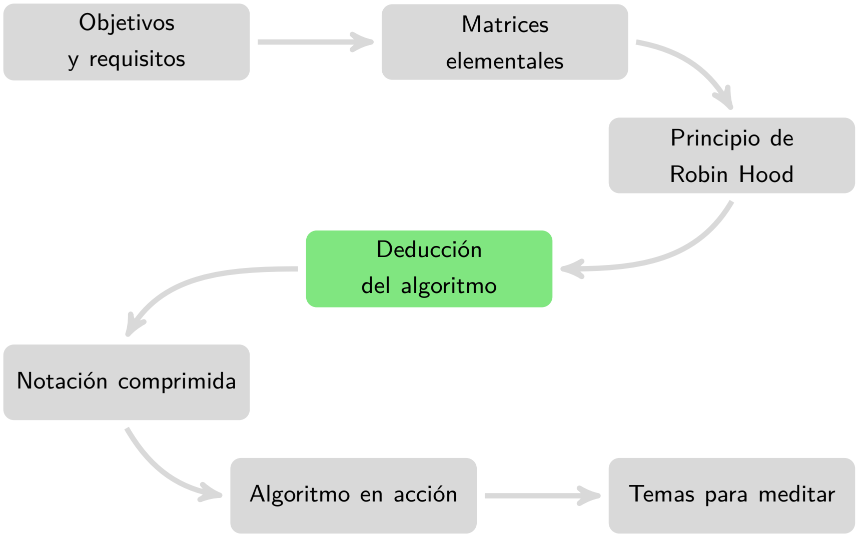
En forma multiplicativa se trata de *dividir y multiplicar*:

$$XY = 3X\,\frac{Y}{3}.$$

En el mundo de matrices, si E es una matriz invertible, entonces

$$AB = AIB = A(E^{-1}E)B = (AE^{-1})\,(EB).$$

Contenido


Objetivos y requisitos
Matrices elementales
Principio de Robin Hood
Deducción del algoritmo
Notación comprimida
Algoritmo en acción
Temas para meditar

Inicio de la deducción del algoritmo

Vamos a construir una factorización LU de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 8 & 11 & -1 \\ 4 & 18 & 5 \end{bmatrix}.$$

En cada paso escribiremos A como un producto LU.

La matriz L siempre será unitriangular inferior.

La matriz U originalmente no será triangular superior,
pero la vamos a convertir en una matriz triangular superior paso a paso.

Hacia el primer paso del algoritmo

Empezamos con $L = I_3$, $U = A$:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 8 & 11 & -1 \\ 4 & 18 & 5 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Nótese que:

- $A = LU$ (así será en cada paso);
- L es unitriangular inferior;
- U todavía no es triangular superior.

Hacia el primer paso del algoritmo

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 8 & 11 & -1 \\ 4 & 18 & 5 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Necesitamos convertir U en una matriz triangular superior.
Para empezar, podemos eliminar la entrada $U_{2,1}$
aplicando la operación elemental $R_2 += 2R_1$.

Aplicar a los renglones de U la operación elemental $R_2 += 2R_1$
es lo mismo que multiplicar U del lado izquierdo por la matriz elemental

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Preparamos el primer paso del algoritmo

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 8 & 11 & -1 \\ 4 & 18 & 5 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Queremos multiplicar U del lado izquierdo por la matriz elemental

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sería injusto sólo sustituir U por EU, pues $A \neq LEU$.
Actuando como Robin Hood (quitarle a los ricos y darle a los pobres) metemos el producto $E^{-1}E$ entre L y U:

$$A = L\,U = L\,I_3\,U = L\,(E^{-1}E)\,U = (LE^{-1})\,(EU).$$

Primer paso del algoritmo

Metimos el producto $E^{-1}E$ entre L y U:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 8 & 11 & -1 \\ 4 & 18 & 5 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Hay que hacer la operación $R_2 += 2R_1$ con los renglones de U y la operación $C_1 += -2C_2$ con las columnas de L:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & 18 & 5 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Felicidades: acabamos el primer paso del algoritmo.

Un receso después del primer paso del algoritmo

Hemos llegado a la siguiente descomposición de A:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 8 & 11 & -1 \\ 4 & 18 & 5 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & 18 & 5 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Notamos que al final del primer paso:

- $A = LU$ (y es fácil comprobarlo);
- L es unitriangular inferior;
- U todavía no es triangular superior, pero ya hemos eliminado una entrada por debajo de la diagonal principal.

Hacia el segundo paso del algoritmo

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & 18 & 5 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Para eliminar $U_{3,1}$ aplicaremos la operación elemental $R_3 += R_1$.
Es lo mismo que multiplicar U del lado izquierdo por la matriz elemental

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para que todo sea justo, al mismo tiempo hay que multiplicar L del lado derecho por la inversa de esta matriz elemental.

Segundo paso del algoritmo

Metemos entre L y U el producto de una matriz elemental por su inversa:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & 18 & 5 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Hacemos la operación $R_3 += R_1$ con los renglones de U
y la operación $C_1 += -C_3$ con las columnas de L:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 15 & 6 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Se terminó el segundo paso.

Un descanso después del segundo paso

Hemos llegado a la siguiente descomposición de A:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 8 & 11 & -1 \\ 4 & 18 & 5 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 15 & 6 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Notamos que:

- $A = LU$ (y es fácil comprobarlo);
- L es unitriangular inferior;
- U todavía no es triangular superior, pero ya hemos eliminado dos entradas por debajo de la diagonal principal.

Preparamos el tercer paso del algoritmo

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 15 & 6 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Para eliminar $U_{3,2}$ aplicaremos la operación elemental $R_3 += -3R_2$.
Es lo mismo que multiplicar U del lado izquierdo por la matriz elemental

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para que todo sea justo, al mismo tiempo hay que multiplicar L del lado derecho por la inversa de esta matriz elemental.

Tercer paso del algoritmo

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 15 & 6 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Hacemos la operación $R_3 += -3R_2$ con los renglones de U
y la operación $C_2 += 3C_3$ con las columnas de L:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Respuesta

Hemos obtenido la siguiente factorización de A:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 8 & 11 & -1 \\ 4 & 18 & 5 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{U}.$$

L es unitriangular inferior, U es triangular superior.
Es la factorización LU requerida. Falta hacer la comprobación.

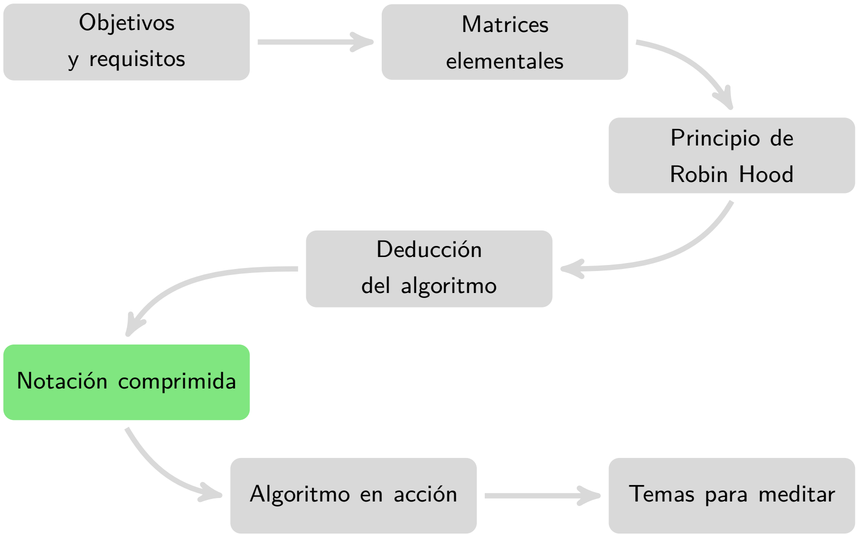
Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4+0+0 & -3+0+0 & 1+0+0 \\ 8+0+0 & 6+5+0 & -2+1+0 \\ 4+0+0 & 3+15+0 & -1+3+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 8 & 11 & -1 \\ 4 & 18 & 5 \end{bmatrix} = A. \quad \checkmark$$

Contenido



Objetivos y requisitos
Matrices elementales
Principio de Robin Hood
Deducción del algoritmo
Notación comprimida
Algoritmo en acción
Temas para meditar

Omitir las matrices elementales

Las matrices elementales nos sirvieron para deducir el algoritmo, pero ahora vamos a quitar estos *andamios*.

Para aplicar al factor U la operación $R_q += \lambda R_p$ escribimos A como

$$A = LU = L(E^{-1}E)U = (LE^{-1})(EU),$$

donde E se obtiene de la matriz identidad al poner λ en la entrada (q, p). Su matriz inversa E^{-1} se obtiene de I al poner $-\lambda$ en la entrada (q, p).

Multiplicar L del lado derecho por E^{-1} es lo mismo que hacer la operación $C_p += -\lambda C_q$ con las columnas de L.

Aplicar operaciones elementales a U y L

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 8 & 11 & -1 \\ 4 & 18 & 5 \end{bmatrix}}_{U}$$

$U\colon\ R_2 += 2R_1,\ R_3 += R_1$
$L\colon\ C_1 += -2C_2,\ C_1 += -C_3$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 15 & 6 \end{bmatrix}}_{U}$$

$U\colon\ R_3 += -3R_2$
$L\colon\ C_2 += 3C_3$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{U}$$

Aplicar operaciones elementales a U y L

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 8 & 11 & -1 \\ 4 & 18 & 5 \end{bmatrix}}_{U} \qquad \begin{array}{l} U\colon\ R_2 += 2R_1,\ R_3 += R_1 \\ L\colon\ C_1 += -2C_2,\ C_1 += -C_3 \end{array}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 15 & 6 \end{bmatrix}}_{U} \qquad \begin{array}{l} U\colon\ R_3 += -3R_2 \\ L\colon\ C_2 += 3C_3 \end{array}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{U}$$

Nótese que es muy fácil aplicar a la matriz L las operaciones indicadas: hay que copiar el coeficiente correspondiente en la posición adecuada.

Transformar U y poner coeficientes en L

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 8 & 11 & -1 \\ 4 & 18 & 5 \end{bmatrix}}_{U} \qquad \begin{array}{l} U\colon\ \ R_2 += 2R_1,\ \ R_3 += R_1 \\ L_{2,1} \leftarrow -2,\ \ L_{3,1} \leftarrow -1 \end{array}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 15 & 6 \end{bmatrix}}_{U} \qquad \begin{array}{l} U\colon\ \ R_3 += -3R_2 \\ L_{3,2} \leftarrow 3 \end{array}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Transformar U y poner coeficientes en L

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 8 & 11 & -1 \\ 4 & 18 & 5 \end{bmatrix}}_{U} \qquad \begin{array}{l} U\colon\ \ R_2 += 2R_1,\ \ R_3 += R_1 \\ L_{2,1} \leftarrow -2,\ \ L_{3,1} \leftarrow -1 \end{array}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 15 & 6 \end{bmatrix}}_{U} \qquad \begin{array}{l} U\colon\ \ R_3 += -3R_2 \\ L_{3,2} \leftarrow 3 \end{array}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{U}.$$

En cada paso se elimina una entrada de U y se llena una entrada de L.
Además las entradas diagonales de L siempre son 1.
Vamos a guardar las entradas no triviales de L en la parte inferior de U.

Notación comprimida para calcular la factorización LU

Las entradas que corresponden a L están marcadas con verde:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 8 & 11 & -1 \\ 4 & 18 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{R_2 \mathrel{+}= 2R_1 \\ R_3 \mathrel{+}= R_1}} \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 15 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \mathrel{+}= -3R_2} \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 8 & 11 & -1 \\ 4 & 18 & 5 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Contenido

Factorización LU, ejemplo 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ -9 & -7 & -14 & 5 \\ 6 & 4 & 10 & -3 \\ -3 & 0 & 10 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{R_2 \mathrel{+}= 3R_1 \\ R_3 \mathrel{+}= -2R_1 \\ R_4 \mathrel{+}= R_1}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 14 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[]{\substack{(R_3 \mathrel{+}= 0R_2) \\ R_4 \mathrel{+}= 2R_2}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 10 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \mathrel{+}= -5R_3} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ -9 & -7 & -14 & 5 \\ 6 & 4 & 10 & -3 \\ -3 & 0 & 10 & -7 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c} 3 & 2 & 4 & -1 \\ \hline -9 & -6-1 & -12-2 & 3+2 \\ \hline 6 & 4+0 & 8+0+2 & -2+0-1 \\ \hline -3 & -2+2 & -4+4+10 & 1-4-5+1 \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 \\ -9 & -7 & -14 & 5 \\ 6 & 4 & 10 & -3 \\ -3 & 0 & 10 & -7 \end{bmatrix} = A. \quad \checkmark$$

Para aprender a jugar fútbol,
no es suficiente sólo ver partidos por la tele.

Übung macht den Meister.
La práctica convierte uno al maestro.

Ejercicios

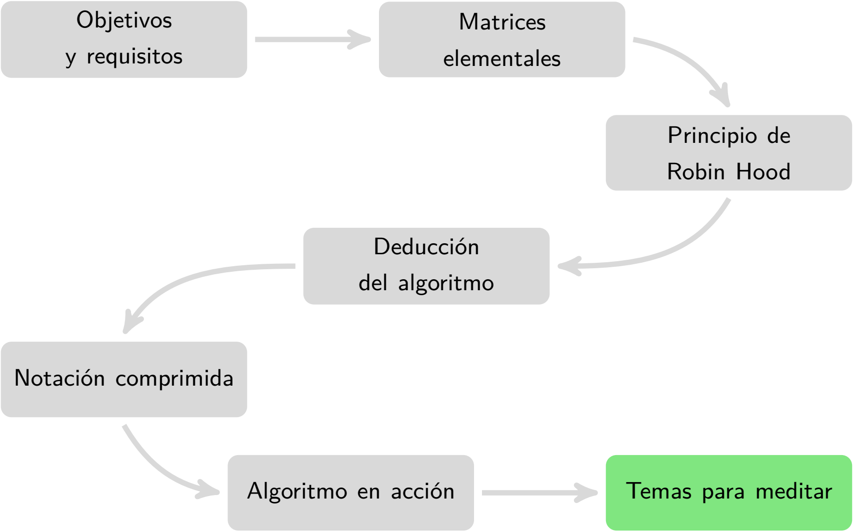
Aplicar el algoritmo de factorización LU (en la notación comprimida) a cada una de las siguientes cuatro matrices. Hacer las comprobaciones.

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 9 & -5 & -11 \\ -6 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 & 1 \\ 9 & -4 & -9 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & -1 \\ 6 & -5 & 9 & 16 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ -6 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/4 & -1 & -1/4 \\ 3/4 & -2 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

En los últimos dos ejercicios las respuestas son fraccionarias.

Contenido


Objetivos y requisitos
Matrices elementales
Principio de Robin Hood
Deducción del algoritmo
Notación comprimida
Algoritmo en acción
Temas para meditar

Ejemplo de una matriz que no tiene factorización LU

Problema

Demostrar que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

no tiene ninguna factorización LU.

Sugerencias: suponer que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} u & v \\ 0 & w \end{bmatrix}}_{U} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix},$$

escribir cuatro ecuaciones ($1 \cdot u + 0 \cdot 0 = 0$, etc.),
analizar el sistema obtenido y mostrar que es inconsistente.

Unicidad de la factorización LU

Problema

Supongamos que A es una matriz cuadrada invertible y

$$A = L_1 U_1 = L_2 U_2,$$

donde L_1 y L_2 son unitriangulares inferiores,
U_1 y U_2 son triangulares superiores.

Demostrar que $L_1 = L_2$ y $U_1 = U_2$.

Sugerencias:

- *Separar moscas de tacos*: transformar la igualdad $L_1 U_1 = L_2 U_2$ de tal manera que las Ls se junten en un lado y las Us en el otro.
- Pensar en el producto y en las inversas de matrices triangulares.
- Pensar en la intersección de la clases de matrices unitriangulares inferiores con la clase de matrices triangulares superiores.

Criterio de existencia de una factorización LU

Problema

Sea A una matriz cuadrada de orden n.
Demostrar que las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) A posee una factorización LU con entradas diagonales de U no nulas;

(b) para cada $p \in \{1, \ldots, n\}$, $\det(A_{\{1,\ldots,p\},\{1,\ldots,p\}}) \neq 0$.

En la condición (b) se trata de los *menores principales líderes* de A, llamados también *menores de esquina*. Por ejemplo, si $n = 4$, $p = 2$,

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix}, \quad \det(A_{\{1,2\},\{1,2\}}) = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{vmatrix}.$$

Criterio de existencia de una factorización LU

Problema

Sea A una matriz cuadrada de orden n.
Demostrar que las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) A posee una factorización LU con entradas diagonales de U no nulas;

(b) para cada $p \in \{1, \ldots, n\}$, $\det(A_{\{1,\ldots,p\},\{1,\ldots,p\}}) \neq 0$.

Sugerencias:

- Para la implicación (a)⇒(b), mostrar que

$$A_{\{1,\ldots,p\},\{1,\ldots,p\}} = L_{\{1,\ldots,p\},\{1,\ldots,p\}} U_{\{1,\ldots,p\},\{1,\ldots,p\}}.$$

- Para la implicación (b)⇒(a), mostrar que las operaciones elementales del tipo $R_q += \lambda R_p$ con $q > p$ no cambiar los menores

$$\det(A_{\{1,\ldots,p\},\{1,\ldots,p\}}),$$

  y en el inicio del paso p la entrada (p, p) de A es distinta de cero.