Algoritmo de factorización LU

Objetivos. Estudiar el algoritmo de la factorización LU de una matriz cuadrada invertible.

Requisitos. Matrices elementales y su relación con operaciones elementales, matriz inversa, propiedades de la multiplicación de matrices.

Explicación del método

1. Definición (factorización LU). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Una factorización LU de la matriz A es un par de matrices (L, U), donde $L, U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, U es triangular superior y L es unitriangular inferior (es decir, L es triangular inferior y todas las entradas diagonales de L son iguales a 1).

2. Notación (matrices triangulares superiores invertibles y matrices triangulares inferiores invertibles). El conjunto de todas las matrices reales triangulares superiores invertibles de orden n se denota por $\mathrm{UT}_n(\mathbb{R})$. Para las matrices triangulares inferiores invertibles se usa la notación $\mathrm{LT}_n(\mathbb{R})$.

3. Unicidad de la factorización LU en el caso de matrices invertibles (tarea adicional). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible que admite una factorización LU. Supóngase que $A = L_1U_1 = L_2U_2$, donde $L_1, L_2 \in \mathrm{LT}_n(\mathbb{R})$, $U_1, U_2 \in \mathrm{UT}_n(\mathbb{R})$ y todos los elementos diagonales de L_1, L_2 son iguales a 1. Demuestre que $L_1 = L_2$ y $U_1 = U_2$.

4. Factorización LU en términos de matrices elementales. Dada una matriz A cuyos menores de esquina todos son no nulos, construyamos las matrices L y U. Vamos a construirlas paso a paso. Primero ponemos $L := I$, $U := A$. En cada paso del algoritmo será valida la igualdad $A = LU$. Empezamos a convertir U en una matriz triangular superior al aplicar operaciones elementales de tipo $R_i += \lambda R_j$, $j < i$. Cada vez, cuando hacemos la operación $R_i += \lambda R_j$ con las filas de U, esto es, multiplicamos U del lado izquiero por $E_+(i, j, \lambda)$, tenemos que multiplicar L del lado derecho por $E_+(i, j, -\lambda)$, es decir hacer con L la operación de columnas $C_j -= \lambda C_i$.

5. Ejemplo con razonamientos extensos. Construyamos la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Solución. Podemos escribir A en forma $A = LU$ con $L = I$, $U = A$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ahora vamos a eliminar el elemento $U_{2,1} = 3$ usando el elemento $U_{1,1} = -1$ como pivote. Tenemos que hacer con U la operación por filas $R_2 += 3R_1$. Es lo mismo que multiplicar U del lado izquierdo por la matriz elemental $E_+(2, 1, 3)$. Para compensar esta multiplicación y conservar el mismo valor del producto LU, tenemos que multiplicar L del lado derecho por $E_+(2, 1, -3)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Multipliquemos U por $E_+(2, 1, 3)$ del lado izquierdo, esto es, hagamos con U la operación por renglones $R_2 += 3R_1$. Multipliquemos L por $E_+(2, 1, -3)$ del lado derecho, esto es, hagamos con L la operación por columnas $C_1 += -3C_2$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Es fácil checar que el producto de las matrices nuevas es igual a la matriz A. Ahora queremos eliminar el elemento $U_{3,1} = 2$ usando como pivote el elemento $U_{1,1} = -1$. Para esto metemos entre L y U el producto de matrices $E_+(3, 1, -2)E_+(3, 1, 2)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Hagamos las operaciones elementales correspondientes ($R_3 += 2R_1$ con U, $C_1 += -2C_2$ con L):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 11 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nos falta eliminar $U_{3,2} = 11$ usando $U_{2,2} = 5$ como pivote. Metemos entre L y U las matrices elementales $E_+(3, 2, 11/5)E_+(3, 2, -11/5)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 11/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 11 & 2 \end{bmatrix}.$$

Apliquemos la operación elemental por renglones $R_3 -= \frac{11}{5}$ a la matriz U y la operación elemental por columnas $C_2 += \frac{11}{5}$ a la matriz L:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 11/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -67/5 \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 11/5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -67/5 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$LU = \begin{bmatrix} -1+0+0 & 3+0+0 & 2+0+0 \\ 3+0+0 & -9+5+0 & -6+7+0 \\ 2+0+0 & -6+11+0 & -4+77/5-67/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix} = A. \quad \square$$

6. Ejemplo sin razonamientos extensos. Construyamos la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 15 & 16 \\ -3 & -7 & -10 \end{bmatrix}.$$

Solución. Ahora vamos a escribir las matrices L y U juntas y en vez de las matrices elementales escribimos sólo las operaciones correspondientes que hacemos con U y L:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 15 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -7 & -10 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{L:}\quad C_1 += 4C_2]{\text{U:}\quad R_2 -= 4R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -7 & -10 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{L:}\quad C_1 -= 3C_3]{\text{U:}\quad R_3 += 3R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{L:}\quad C_1 += \frac{2}{3}C_3]{\text{U:}\quad R_3 -= \frac{2}{3}R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ -3 & 2/3 & 1 & 0 & 0 & 23/3 \end{array}\right].$$

Respuesta:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 23/3 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$LU = \begin{bmatrix} 1+0+0 & 3+0+0 & 5+0+0 \\ 4+0+0 & 12+3+0 & 20-4+0 \\ -3+0+0 & -9+2+0 & -15-8/3+23/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 15 & 16 \\ -3 & -1 & -10 \end{bmatrix} = A. \quad \square$$

7. Observación. En el algoritmo de factorización LU es fácil hacer la comprobación en cada paso del algoritmo, porque el producto LU siempre debe ser igual a la matriz original A.

Notación breve para la factorización LU

8. Notación breve para la factorización LU. Primera observación. Cuando hacemos una operación $R_q += \lambda R_p$ con las filas de U, donde $q > p$, tenemos que hacer la operación $C_p -= \lambda C_q$ con las columnas de L. Pero en este momento la q-ésima columna de L coincide con la q-ésima columna de la matriz identidad. Consiguientemente la operación $C_p -= \lambda C_q$ con las columnas de L equivale al poner $L_{q,p} \coloneqq -\lambda$.

Segunda observación. Después de eliminar el elemento $U_{q,p}$ ya no es necesario guardar su valor nuevo porque sabemos que este valor nuevo es cero. En este lugar podemos guardar el valor $L_{q,p} = -\lambda$.

Resumen: trabajamos con una sóla matriz B. En su parte superior (incluyendo la diagonal) construimos paso a paso la matriz U, y en su parte inferior construimos al mismo tiempo la matriz L.

9. Ejemplo. Construyamos la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 4 \\ -6 & -3 & -14 \end{bmatrix}.$$

Solución. Marcamos los elementos de L con otro color.

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 4 \\ -6 & -3 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{B_{2,1} \coloneqq -2 \\ B_{3,1} \coloneqq 3}]{\substack{R_2 += 2R_1 \\ R_3 += -3R_1}} \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -15 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow[B_{3,2} \coloneqq -5]{R_3 += 5R_2} \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$LU = \begin{bmatrix} -2+0+0 & 4+0+0 & -1+0+0 \\ 4+0+0 & -8+3+0 & 2+2+0 \\ -6+0+0 & 12-15+0 & -3-10-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 4 \\ -6 & -3 & -14 \end{bmatrix} = A. \qquad \square$$

10. Ejercicios. Para cada una de las siguientes matrices construya la factorización LU y haga la comprobación:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -5 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -2 & -8 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 11 & 10 \\ -3 & 9 & 5 \end{bmatrix}.$$

Aplicación de la factorización LU a la solución de los sistemas de ecuaciones lineales

11. Método. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible, (L, U) su factorización LU y $b \in \mathbb{R}^n$. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ o sea $LUx = b$. Denotemos Ux por y. El sistema $Ax = b$ se puede resolver en dos pasos. Primero, calculamos la solución y de la ecuación $Ly = b$. Segundo, calculamos la solución x de la ecuación $Ux = y$.

12. Ejemplo. Usando la factorización LU resolver el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 9 & 2 \\ 6 & -12 & -2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Solución. Primero, factoricemos la matriz A:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 9 & 2 \\ 6 & -12 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 -= 3R_1]{R_2 += 2R_1} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += R_2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

De allí

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+0+0 & -3+0+0 & 1+0+0 \\ -4+0+0 & 6+3+0 & -2+4+0 \\ 6+0+0 & -9-3+0 & 3-4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 9 & 2 \\ 6 & -12 & -2 \end{bmatrix} = A. \quad \checkmark$$

Resolvamos el sistema de ecuaciones lineales $Ly = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}. \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} y_1 &= 3; \\ y_2 &= 4 + 2y_1 = 10; \\ y_3 &= -2 - 3y_1 + y_2 = -1. \end{aligned}$$

Luego resolvamos el sistema de ecuaciones lineales $Ux = y$. Primero despejemos la incógnita x_3, luego x_2 y x_1:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ -1 \end{bmatrix}. \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{3+3x_2-x_3}{2} = 4; \\ x_2 &= \tfrac{10-4x_3}{3} = 2; \\ x_3 &= \tfrac{-1}{-1} = 1. \end{aligned}$$

Respuesta:

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 9 & 2 \\ 6 & -12 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 - 6 + 1 \\ -16 + 18 + 2 \\ 24 - 24 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = b. \quad \checkmark \qquad \square$$

13. Ejercicios. Usando la factorización LU resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales (haga todas comprobaciones):

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -6 & 7 & 0 \\ 6 & -7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -7 \\ 9 & 13 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$