Programación: interpolación segmentaria con combinaciones lineales de splines básicos cúbicos

Objetivos. Dada una lista de abscisas $t_1, \ldots, t_n$ y ordenadas $x_1, \ldots, x_n$, construir una combinación lineal de splines básicos de orden 3 que tome los valores $x_1, \ldots, x_n$ en los puntos $t_1, \ldots, t_n$.

Requisitos. Cálculo de splines básicos de cualquier grado.

1. Función que evalua los splines básicos en los puntos dados. En las clases pasadas programamos una función

- `evalbsplines(t, u, d)`

que evalúa en los puntos $u_1, \ldots, u_m$ los splines básicos de grado d asociados a los nodos dados $t_1, \ldots, t_n$.

2. Sistema extendido de nodos. Calculamos h como el promedio de las distancias entre los nodos $t_1, \ldots, t_n$ y agregamos cuatro nodos auxiliares $t_1 - 2h$, $t_1 - h$, $t_n + h$ y $t_n + 2h$. Entonces la lista nueva de los nodos será

$$T_1 = t_1 - 2h,\ T_2 = t_1 - h, \quad T_3 = t_1,\ \ldots,\ T_{n+2} = t_n, \quad T_{n+3} = t_n + h,\ T_{n+4} = t_n + 2h.$$

A estos nodos les corresponden n splines básicos de grado 3:

$$B_{3,1}, \qquad \ldots, \qquad B_{3,n}.$$

El código correspondiente:

```
function [T] = extendedcubicnodes(t),
   n = length(t);
   h = sum(diff(t)) / (n - 1);
   T = [t(1) - 2 * h; t(1) - h; t; t(n) + h; t(n) + 2 * h];
end
```

3. Los valores de una combinación lineal de splines básicos en un arreglo de puntos. Consideramos una combinación lineal de estas funciones:

$$f(u) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k B_{3,k}(u).$$

Notamos que los valores de la función f en algunos puntos $u_1, \ldots, u_m$ se pueden calcular como el producto de cierta matriz por cierto vector:

$$\begin{bmatrix} f(u_1) \\ \vdots \\ f(u_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \end{bmatrix}.$$

4. Sistema de ecuaciones lineales para calcular los coeficientes. Queremos que los valores de esta función en los nodos originales $t_1, \ldots, t_n$ sean los números dados $x_1, \ldots, x_n$. Obtenemos un sistema de ecuaciones lineales para las incógnitas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$:

$$\begin{bmatrix} \quad & \cdots & \quad \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \quad & \cdots & B_{3,n}(t_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Al resolver este sistema obtenemos los coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

5. Cálculo de los coeficientes de una combinación lineal de splines cúbicos básicos que interpole los puntos dados.

```
function [al] = coefscubicbsplines(t, x),
   T = extendedcubicnodes(t);
   V = evalbsplines(T, 3, t);
   al = V \ x;
end
```

6. Prueba.

```
function [] = testinterpolbsplines(),
   t = [-4; -3; -1; 3; 5];
   x = [2; 3; -1; -1; 2];
   T = extendedcubicnodes(t);
   al = coefscubicbsplines(t, x);
   # compute many points to construct the plot:
   u = linspace(min(t), max(t), 201)';
   v = evalbsplines(???, ???, 3) * al;
   plot(u, v, t, x, '*');
end
```

7. Tarea adicional: tomar en cuenta la estructura tridiagonal. Es fácil ver que el sistema de ecuaciones lineales (1) es tridiagonal. Se puede tomar en cuenta este hecho al formar y resolver el sistema de ecuaciones lineales.