Normas de las matrices que surgen en varios métodos de diferencias finitas que se usan para resolver la ecuación de calor en un intervalo

Objetivos. Calcular o acotar las normas matriciales $\|\cdot\|_{\text{matr},\infty}$ y $\|\cdot\|_{\text{matr},2}$ de las matrices que se aplican en cada paso de los métodos de diferencias finitas para resolver la ecuación de calor en un intervalo.

Normas matriciales (repaso)

1. Definición de las normas matriciales asociadas a normas vectoriales (repaso). Para cada p en $[1, +\infty]$ denotemos por $\|\cdot\|_p$ a la p-norma en $\mathbb{R}^n$. Entonces la norma $\|\cdot\|_{\text{matr},p}$ en el espacio $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se define mediante la siguiente fórmula:

$$\|A\|_{\text{matr},p} \coloneqq \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|_p\le 1}} \|Ax\|_p.$$

Es fácil ver que $\|Ax\|_p \le \|A\|_{\text{matr},p}\|x\|_p$.

2. Fórmula eficiente para calcular la norma matricial asociada a la norma-máximo de vectores.

$$\|A\|_{\text{matr},\infty} = \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{n} |A_{j,k}| = \max_{1\le j\le n} \|A_{j,*}\|_1. \tag{1}$$

3. Fórmula para calcular la norma matricial asociada a la norma euclideana de vectores, de una matriz real simétrica. Sea A una matriz real simétrica $n \times n$, esto es, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $A^\top = A$. Entonces se sabe que existe una matriz ortogonal Q y un vector d en $\mathbb{R}^n$ tales que $Q^\top AQ = \operatorname{diag}(d)$. Las componentes del vector d son los valores propios de A. Puede demostrar que

$$\|A\|_{\text{matr},2} = \|\operatorname{diag}(d)\|_{\text{matr},2} = \|d\|_\infty.$$

En otras palabras, si A es una matriz real simétrica, entonces $\|A\|_{\text{matr},2}$ es el máximo valor absoluto de los valores propios de A.

Algunas matrices de Toeplitz tridiagonales

4. Matriz tridiagonal de Toeplitz con entradas $-1, 2, -1$. Denotemos por T_n a la matriz $n \times n$ tridiagonal de Toeplitz cuyas entradas están definidas mediante la siguiente regla:

$$(T_n)_{j,k} \coloneqq \begin{cases} 2, & j = k; \\ -1, & |j-k| = 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se sabe que

$$S_n T_n S_n = \operatorname{diag}\left[4 \operatorname{sen}^2 \frac{j\pi}{2(n+1)}\right]_{j=1}^{n},$$

donde S_n es la matriz de la transformada discreta de seno. En este momento nos importa solamente que S_n es una matriz simétrica e involutiva ($S_n^2 = I_n$), por lo tanto es ortogonal ($S_n^\top S_n = I_n$). Los números $4 \operatorname{sen}^2 \frac{j\pi}{2(n+1)}$, donde $j \in \{1, \ldots, n\}$, son los valores propios de T_n.

5. Proposición (sobre la matriz que surge en el método explícito de diferencias finitas). Consideremos la matriz $A_n = I_{n-1} - \rho T_{n-1}$.

1. Los valores propios de A son $1 - 4\rho \operatorname{sen}^2 \frac{j\pi}{2n}$, con j en $\{1, \ldots, n\}$.
2. Si $0 < \rho \le 1/2$, entonces $\|A_n\|_{\mathrm{matr},\infty} \le 1$.
3. Si $0 < \rho \le 1/2$, entonces $\|A_n\|_{\mathrm{matr},2} \le 1$.
4. Si $\rho > 1/2$ y n es suficientemente grande, entonces

$$\|A_n\|_{\mathrm{matr},2} > 1, \qquad \lim_{p\to\infty} \|A_n^p\|_{\mathrm{matr},2} = +\infty.$$

Demostración. 1. Sale de la igualdad

$$S_{n-1} A_n S_{n-1} = \operatorname{diag}\left[1 - 4\rho \operatorname{sen}^2 \frac{j\pi}{2n}\right]_{j=1}^{n}.$$

2. Sea $0 < \rho \le 1/2$. Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$,

$$\sum_{k=1}^{n} |A_{j,k}| \le \rho + |1 - 2\rho| + \rho = \rho + (1 - 2\rho) + \rho = 1,$$

por eso $\|A\|_{\mathrm{matr},\infty} \le 1$.

3. Sea $0 < \rho \le 1/2$. Entonces $4\rho \le 2$, y los valores propios de A_n pertenecen a $[-1, 1]$.

4. Sea $\rho > 1/2$. El mínimo valor propio de A_n es

$$1 - 4\rho \operatorname{sen}^2 \frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

El número 4ρ es estrictamente mayor que 2, y el número $\operatorname{sen}^2 \frac{(n-1)\pi}{2n}$ tiende a 1 cuando n tiende a infinito. Por lo tanto, si n es bastante grande, entonces $1 - 4\rho \operatorname{sen}^2 \frac{(n-1)\pi}{2n} < -1$, y $\|A_n\|_{\text{matr},2} > 1$. De la descomposición espectral obtenemos que

$$\|A_n^p\|_{\text{matr},2} = \|A_n\|_{\text{matr},2}^p \to +\infty \quad (p \to \infty). \qquad \square$$