Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico III.
Examen parcial III. Variante α.

Solución numérica de la ecuación de calor usando diferencias finitas.

Nombre:

Calificación (%):	examen escrito 3	tarea adicional	parti-cipación	parcial 3	total

Problema 1. *25 %.*
Enuncie la ecuación de calor sobre el intervalo $[0, 1]$, con condiciones de frontera nulas y con una condición inicial. Explique brevemente el **método explícito de diferencias finitas**, donde la derivada respecto al tiempo $(D_2u)(x_j, t_k)$ se aproxima por una diferencia finita **hacia adelante**, usando $u(x_j, t_k)$ y $u(x_j, t_{k+1})$, y la segunda derivada espacial $(D_1^2u)(x_j, t_k)$ se aproxima utilizando $u(x_j, t_k)$, $u(x_{j-1}, t_k)$ y $u(x_{j+1}, t_k)$. Se recomienda usar la notación h para el paso espacial y la notación τ para el paso temporal. Se supone que están dados la función inicial f, el tiempo máximo T, el número n de intervalos en el espacio y el número m de intervalos en el tiempo. En los Problemas 2–5 se trata del mismo método.

Problema 2. *10 %.*
Escriba una estimación del **error de truncamiento local** en el método explicado anteriormente, suponiendo que la solución u es continuamente derivable, y que sus derivadas necesarias son acotadas.

Problema 3. *10 %.*
Escriba el método de diferencias finitas del Problema 1 en **forma matricial**, como $U^{(k+1)} = MU^{(k)}$. Es suficiente explicar la estructura de la inversa de la matriz M.

Problema 4. *25 %.*
Programe este método como una función en algún lenguaje de programación. Los argumentos de la función son `f`, `T`, `n` y `m` (véase el Problema 1). La función debe regresar el arreglo de los valores de la función u en el momento de tiempo `T`.

Problema 5. *20 %.*
Acote por arriba la norma de la matriz M del Problema 3, suponiendo que $\tau/h^2 \leqslant 1/2$. Se recomienda enunciar una fórmula cómoda para calcular la norma matricial asociada a la norma vectorial $\|\cdot\|_\infty$, y aplicar esta fórmula a la matriz M.

Problema 6. *20 %.*
Enuncie y demuestre una **estimación superior para el error de la solución del mismo método**; en otras palabras, acote la diferencia $|u(x_j, t_k) - U_j^{(k)}|$ entre la solución exacta y la solución obtenida con el método de diferencias finitas. Se recomienda usar los resultados de los Problemas 2 y 5.

Problema 7. *30 %.*
Explique la idea del método de diferencias finitas para la **ecuación de onda** $(D_2^2u)(x, t) = (D_1^2u)(x, t)$ en el intervalo $[0, 1]$, con las condiciones de frontera cero, una condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ y la velocidad inicial cero: $(D_2u)(x, 0) = 0$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico III.
Examen parcial III. Variante β.

Solución numérica de la ecuación de calor usando diferencias finitas.

Nombre:

Calificación (%):	examen escrito 3	tarea adicional	participación	parcial 3	total

Problema 1. *25 %.*
Enuncie la ecuación de calor sobre el intervalo $[0, 1]$, con condiciones de frontera nulas y con una condición inicial. Explique brevemente el **método implícito de diferencias finitas**, donde la derivada respecto al tiempo $(D_2u)(x_j, t_{k+1})$ se aproxima por una diferencia finita **hacia atrás**, usando $u(x_j, t_k)$ y $u(x_j, t_{k+1})$, y la segunda derivada espacial $(D_1^2u)(x_j, t_{k+1})$ se aproxima utilizando $u(x_j, t_{k+1})$, $u(x_{j-1}, t_{k+1})$ y $u(x_{j+1}, t_{k+1})$. Se recomienda usar la notación h para el paso espacial y la notación τ para el paso temporal. Se supone que están dados la función inicial f, el tiempo máximo T, el número n de intervalos en el espacio y el número m de intervalos en el tiempo. En los Problemas 2–5 se trata del mismo método.

Problema 2. *10 %.*
Escriba una estimación del **error de truncamiento local** en el método explicado anteriormente, suponiendo que la solución u es continuamente derivable, y que sus derivadas necesarias son acotadas.

Problema 3. *10 %.*
Escriba el método de diferencias finitas del Problema 1 en **forma matricial**, como $BU^{(k+1)} = U^{(k)}$. Es suficiente explicar la estructura de la matriz B. En lo que sigue, denotamos B^{-1} por M.

Problema 4. *25 %.*
Programe este método como una función en algún lenguaje de programación. Los argumentos de la función son `f`, `T`, `n` y `m` (véase el Problema 1). La función debe regresar el arreglo de los valores de la función u en el momento de tiempo `T`.

Problema 5. *20 %.*
Enuncie y demuestre una **cota superior para norma de la matriz** M del Problema 3. Se trata de la norma matricial asociada a la norma vectorial $\|\cdot\|_\infty$. Se recomienda empezar con la definición general de esta norma matricial.

Problema 6. *20 %.*
Enuncie y demuestre una **estimación superior para el error de la solución del mismo método**; en otras palabras, acote la diferencia $|u(x_j, t_k) - U_j^{(k)}|$ entre la solución exacta y la solución obtenida con el método de diferencias finitas. Se recomienda usar los resultados de los Problemas 2 y 5.

Problema 7. *30 %.*
Explique la idea del **método de Crank y Nicolson** para resolver el mismo problema que se considera arriba. No es necesario acotar los errores de truncamiento.