Expresamos derivadas a través de diferencias finitas

Con ayuda de Yahir Uriel Guzmán Pérez corregí algunos errores serios que había cometido en este texto.

Objetivos. Expresar las primeras derivadas x', x'' a través de diferencias finitas, usando una malla uniforme.

1. Primera derivada, con un error de orden $O(h)$. Sea A un intervalo, $x \in C^2(A)$, $t \in A$. Entonces por la fórmula de Taylor, para cada h en $\mathbb{R}$ tal que $t + h \in A$,

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + O(h^2).$$

Despejamos $x'(t)$:

$$x'(t) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h} + O(h). \tag{1}$$

2. Primera derivada, con un error de orden $O(h^2)$. Sea $x \in C^3(A)$. Entonces

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(t) + O(h^3),$$
$$x(t-h) = x(t) - hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(t) + O(h^3).$$

Restamos y despejamos $x'(t)$:

$$x'(t) = \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h} + O(h^2). \tag{2}$$

3. Segunda derivada, con un error de orden $O(h^2)$. Sea $x \in C^4(A)$. Entonces

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(t) + \frac{h^3}{6}x^{(3)}(t) + O(h^4),$$
$$x(t-h) = x(t) - hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(t) - \frac{h^3}{6}x^{(3)}(t) + O(h^4).$$

Sumamos estas expresiones, restamos $2x(t)$ y despejamos $x''(t)$:

$$x''(t) = \frac{x(t+h) - 2x(t) + x(t-h)}{h^2} + O(h^2). \tag{3}$$

4. Segunda derivada, con un error de orden $\mathbf{O(h^4)}$. Sea $x \in C^6(A)$. Entonces

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(t) + \frac{h^3}{6}x^{(3)}(t) + \frac{h^4}{24}x^{(4)}(t) + \frac{h^5}{120}x^{(5)}(t) + O(h^6).$$

Sustituimos $2h$ en lugar de h:

$$\begin{aligned} x(t+2h) = x(t) + 2hx'(t) + \frac{4h^2}{2}x''(t) + \frac{8h^3}{6}x^{(3)}(t) \\ + \frac{16h^4}{24}x^{(4)}(t) + \frac{32h^5}{120}x^{(5)}(t) + O(h^6). \end{aligned}$$

También se tienen expansiones similares para $x(t-h)$ y $x(t-2h)$, allá las potencias impares de h vienen con signos negativos. Busquemos coeficientes α, β, γ tales que

$$x''(t) = \frac{\alpha x(t-2h) + \beta x(t-h) + \gamma x(t) + \beta x(t+h) + \alpha x(t+2h)}{h^2} + O(h^4).$$

Consideremos el numerador:

$$N = \alpha x(t-2h) + \beta x(t-h) + \gamma x(t) + \beta x(t+h) + \alpha x(t+2h)$$

Notamos que se cancelan los términos con h, h^3 y h^5, y se obtiene la siguiente expresión:

$$N = (2\alpha + 2\beta + \gamma)x(t) + \frac{2(4\alpha+\beta)}{2}\, x''(t)\, h^2 + \frac{2(16\alpha+\beta)}{24}\, x^{(4)}(t)\, h^4 + O(h^6).$$

Queremos que el coeficiente de h^2 sea $x''(t)$ y los coeficientes de h^0 y h^4 sean 0. Obtenemos el siguiente sistema para α, β, γ:

$$2\alpha + 2\beta + \gamma = 0, \qquad 4\alpha + \beta = 1, \qquad 16\alpha + \beta = 0.$$

Resolviendo este sistema obtenemos

$$\alpha = -\frac{1}{12}, \qquad \beta = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}, \qquad \gamma = -\frac{30}{12} = -\frac{5}{2}.$$

Fórmula final:

$$x''(t) = -\frac{x(t-2h) - 16x(t-h) + 30x(t) - 16x(t+h) + x(t-2h)}{12h^2} + O(h^4).$$