Suma de la progresión geométrica

Casos particulares y generalización

1. Ejemplo. Calcule el producto $(1-q)(1+q+q^2+q^3)$.

Solución. Primero multiplicamos $1+q+q^2+q^3$ por 1, luego por $-q$:

$$\begin{aligned}(1-q)(1+q+q^2+q^3) &= 1+q+q^2+q^3 \\ &\qquad -q-q^2-q^3-q^4 \\ &= 1-q^4. \end{aligned}$$

□

2. Calcule el producto (escriba los cálculos intermedios):

$$\begin{aligned}(1-q)(1+q+q^2) \quad &= \quad \;\; + \quad\; + \\ & \quad\;\; - \quad\; - \quad\; - \\ &= \end{aligned}$$

3. Calcule el producto:

$$(1-q)(1+q+q^2+q^3+q^4) = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

4. Escriba la fórmula general:

$$\boxed{(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^m) = \qquad\qquad}$$

5. Despeje la suma $1+q+q^2+\ldots+q^m$ de la fórmula obtenida en el ejercicio anterior. Dividiendo entre $1-q$ suponemos que $1-q \neq 0$.

$$\boxed{1+q+q^2+\ldots+q^m = \qquad\qquad \text{donde} \quad q \neq \underbrace{\quad}_{?}}$$

Ejemplos de aplicación de la fórmula

6. Escriba otra vez la fórmula para la suma finita de la progresión geométrica:

$$\boxed{1 + q + q^2 + \ldots + q^m = \qquad\qquad \text{donde} \quad q \neq \underbrace{}_{?}}$$

7. Aplique la fórmula del ejercicio anterior para calcular la siguiente suma:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \underbrace{1 + \frac{1}{} + \frac{1}{} + \ldots + \frac{1}{}}_{1+\frac{1}{???^1}+\frac{1}{???^2}+\ldots+\frac{1}{???^{???}}} = \begin{bmatrix} q = \underbrace{}_{?} \\ m = \underbrace{}_{?} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{}{1 -} =$$

8. Calcule la siguiente suma:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} =$$

9. Leyenda sobre el inventor del ajedrez y granos de arroz.
Puede leer los detalles en:

http://javierarenzana.es/matematicas/curiosidades/la-leyenda-del-ajedrez.html

Cuenta la leyenda que un rey dijo al inventor de ajedrez que le pidiese lo que quisiera. El sabio le pidió: un grano de arroz por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta... y así sucesivamente, duplicando en cada casilla la cantidad de la anterior hasta llegar a la última (el tablero tiene 64 casillas). El monarca encantado por lo barato que le iba a resultar el juego tan genial, procedió a realizar el pago y... Cuente el número de los granos que debería pagar el rey.

Caso excepcional $q = 1$

10. Notemos que la suma $1 + q + q^2 + q^3$ consta de $\underbrace{\qquad}_{?}$ sumandos.

11. En general, la suma $1 + q + q^2 + \ldots + q^m$ consta de $\underbrace{\qquad\quad}_{?}$ sumandos.

12. Si $q = 1$, entonces

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^m = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

13. Escriba la fórmula general:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^m = \begin{cases} \qquad\qquad\qquad, & \text{si} \quad q \neq 1; \\ \qquad\qquad\qquad, & \text{si} \quad q = 1. \end{cases}$$

A veces es necesario escribir la suma de la progresión geométrica hasta la potencia q^{n-1}.

14. Notemos que la suma $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$ consta de $\underbrace{\qquad}_{?}$ sumandos.

15. Escriba la fórmula:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \begin{cases} \qquad\qquad\qquad, & \text{si} \quad q \neq 1; \\ \qquad\qquad\qquad, & \text{si} \quad q = 1. \end{cases}$$

Progresión geométrica cuyo primer término es distinto de uno

En los ejercicios anteriores hemos deducido una fórmula para la progresión geométrica cuyo primer término es 1.

16. Idea: factorizar el primer término.

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 = a\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right) = a\,\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} \qquad (q \neq 1).$$

17. Ejemplo.

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \cdots + \frac{1}{288} = \qquad \left(\frac{1}{\qquad} + \frac{1}{\qquad} + \ldots + \frac{1}{\qquad}\right)$$

$$= \qquad \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \ldots + \frac{1}{\qquad}\right) = \qquad \frac{\qquad\qquad\qquad}{\qquad\qquad\qquad}$$

$$=$$

18. Fórmula general.

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^m = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (q \neq 1).$$

19. La suma de un corte de una progresión geométrica.

$$q^5 + q^6 + q^7 + \cdots + q^{19} + q^{20} = q^5\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\right)$$

$$= q^5\,\frac{\qquad\qquad\qquad}{\qquad\qquad\qquad} \qquad (q \neq 1).$$

Notación breve para sumas (repaso)

El símbolo $\sum$ proviene de la letra griega "sigma" y se usa para denotar brevemente sumas.

20. Ejemplo. $\displaystyle\sum_{j=3}^{6} a_j = \underbrace{a_3}_{a_j \text{ con } j=3} + \underbrace{\qquad}_{a_j \text{ con } j=4} + \underbrace{\qquad}_{a_j \text{ con } j=5} + \underbrace{\qquad}_{a_j \text{ con } j=6}.$

21. Ejemplo. $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} 5^k = 5^2 + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} =$

22. Escriba las siguientes sumas en forma explícita (todos los sumandos):

$$\sum_{k=0}^{4} q^k =$$

$$\sum_{j=2}^{5} \frac{1}{j} =$$

23. Escriba las siguientes sumas en forma breve, usando la notación $\sum$:

$$a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{k=1}^{3} a_3, \qquad b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 = \sum_{k=???}^{???} ??? = \sum_{k=} \underbrace{\qquad}_{?},$$

$$4 + 8 + 16 + 32 = \sum \underbrace{\qquad}_{2^?}, \qquad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \sum \qquad\qquad .$$

Separación del primer o último sumando de la suma (repaso)

24. Separación del primer sumando de la suma:

$$\sum_{j=1}^{4} a_j = \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} = a_1 + \left(a_2 + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?}\right) = a_1 + \sum \underbrace{\qquad}_{?}.$$

25. Separación del último sumando de la suma:

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{7} c_k &= \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} \\ &= \left(\underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?}\right) + \underbrace{\qquad}_{?} = \sum \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?}.\end{aligned}$$

26. Separe el primer sumando de la suma:

$$\sum_{j=2}^{9} a_j = \underbrace{\qquad}_{?} + \sum \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Separe el último sumando de la suma:

$$\sum_{j=2}^{9} a_j = \sum \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Cambio de variable en la suma (repaso)

27. Escriba en forma explícita las siguientes sumas y compare los resultados:

$$\sum_{j=4}^{6} a_j = \underbrace{\quad}_{?} + \underbrace{\quad}_{?} + \underbrace{\quad}_{?}, \qquad \sum_{k=7}^{9} a_{k-3} = \underbrace{\quad}_{?} + \underbrace{\quad}_{?} + \underbrace{\quad}_{?}.$$

28. Ejemplo.

$$\sum_{j=4}^{6} a_j = \begin{bmatrix} k = j+3 \\ j = k-3 \end{bmatrix} = \sum_{k=7}^{9} a_{k-2}.$$

29. Haga cambios de variables:

$$\sum_{j=3}^{8} a_j = \begin{bmatrix} k = j-2 \\ j = \underbrace{\quad}_{?} \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{j=4}^{7} a_{j+1} = \begin{bmatrix} k = j+1 \\ j = \underbrace{\quad}_{?} \end{bmatrix} =$$

30. Escriba la siguiente suma en forma extensa (todos los sumandos) y luego en forma breve con una variable nueva:

$$\sum_{k=2}^{5} q^{k+1} = \underbrace{\quad}_{\substack{q^{k+1} \\ \text{con } k=2}} + \underbrace{\quad}_{\substack{q^{k+1} \\ \text{con } k=3}} + \underbrace{\quad}_{\substack{q^{k+1} \\ \text{con } k=4}} + \underbrace{\quad}_{\substack{q^{k+1} \\ \text{con } k=5}} = \sum_{p=???}^{???} q^p = \sum_{p=} q^p.$$

Ahora el mismo cambio de variable de manera formal:

$$\sum_{k=2}^{5} q^{k+1} = \begin{bmatrix} p = \underbrace{\quad}_{?} \\ k = \underbrace{\quad}_{?} \end{bmatrix} = \sum_{p=} q^p.$$

Deducción formal de la fórmula para la suma finita de una progresión geométrica

31. Escriba la siguiente suma usando la notación $\sum$:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \sum_{j=???}^{???} q^j = \sum_{j=} \underbrace{\qquad}_{?} .$$

32. En la siguiente suma separe el primer sumando:

$$\sum_{j=0}^{n-1} q^j = \underbrace{\qquad}_{?} + \sum \underbrace{\qquad}_{?} .$$

33. Multiplique cada sumando por el factor q, haga el cambio de variable y separe el último sumando:

$$q \sum_{j=0}^{n-1} q^j = \sum_{j=0}^{n-1} q \cdot \underbrace{\qquad}_{?} = \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\qquad\quad}_{?} = \begin{bmatrix} k = j + 1 \\ j = \underbrace{\qquad}_{?} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k=} \underbrace{\qquad}_{?} = \left(\sum_{k=} \underbrace{\qquad}_{?} \right) + \underbrace{\qquad}_{?} .$$

34. Usando los resultados de los ejercicios anteriores simplifique la expresión:

$$(1 - q) \sum_{j=0}^{n-1} q^j =$$

35. Escriba la fórmula para la suma finita de la progresión geométrica:

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n-1} q^j = \qquad\qquad\qquad \text{donde} \quad q \neq \underbrace{\qquad}_{?}}$$

Fórmula para la suma infinita de una progresión geométrica

36. Consideremos la sucesión $a_n = \left(\frac{1}{2n}\right)^n$.
Calcule los primeros valores de esta sucesión y determine su límite.

$$a_1 = \qquad, \qquad a_2 = \qquad, \qquad a_3 = \qquad, \qquad a_4 = \qquad.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

37. Sea q un número tal que $|q| < 1$. Recuerde el valor del siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

38. Recuerde la definición de la suma de una serie infinita en términos de sumas parciales:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{???\to???} \sum_{k=0}^{???} ??? =$$

39. Sea q un número fijo tal que $|q| < 1$. Escriba la fórmula para la siguiente suma y piense qué pasa cuando $n \to \infty$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k =$$

40. Fórmula para la suma infinita de una progresión geométrica.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \qquad\qquad\qquad \text{donde} \qquad |q| < \underbrace{\qquad}_{?}}$$