

Algunos elementos de lógica con cuantificadores

Egor Maximenko

<http://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

26 de febrero de 2021

Objetivo:

reparar algunas reglas sobre los predicados y cuantificadores.

Prerrequisitos:

operaciones lógicas, predicados, cuantificadores.

Las leyes de De Morgan

Sea $P: A \rightarrow \{0, 1\}$ un predicado.

$$\overline{\forall \alpha \in A \quad P(\alpha)} \iff \exists \alpha \in A \quad \overline{P(\alpha)}.$$

$$\overline{\exists \alpha \in A \quad P(\alpha)} \iff \forall \alpha \in A \quad \overline{P(\alpha)}.$$

Interacción de \forall con \wedge , interacción de \forall con \vee

Sean $P, Q: A \rightarrow \{0, 1\}$ dos predicados.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \left(P(\alpha) \wedge Q(\alpha) \right) \qquad \left(\forall \alpha \in A \ P(\alpha) \right) \wedge \left(\forall \alpha \in A \ Q(\alpha) \right).$$

Interacción de \forall con \wedge , interacción de \forall con \vee

Sean $P, Q: A \rightarrow \{0, 1\}$ dos predicados.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \left(P(\alpha) \wedge Q(\alpha) \right) \iff \left(\forall \alpha \in A \ P(\alpha) \right) \wedge \left(\forall \alpha \in A \ Q(\alpha) \right).$$

Interacción de \forall con \wedge , interacción de \forall con \vee

Sean $P, Q: A \rightarrow \{0, 1\}$ dos predicados.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \left(P(\alpha) \wedge Q(\alpha) \right) \iff \left(\forall \alpha \in A \ P(\alpha) \right) \wedge \left(\forall \alpha \in A \ Q(\alpha) \right).$$

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \left(P(\alpha) \vee Q(\alpha) \right) \iff \left(\forall \alpha \in A \ P(\alpha) \right) \vee \left(\forall \alpha \in A \ Q(\alpha) \right).$$

Interacción de \forall con \wedge , interacción de \forall con \vee

Sean $P, Q: A \rightarrow \{0, 1\}$ dos predicados.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \left(P(\alpha) \wedge Q(\alpha) \right) \iff \left(\forall \alpha \in A \ P(\alpha) \right) \wedge \left(\forall \alpha \in A \ Q(\alpha) \right).$$

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \left(P(\alpha) \vee Q(\alpha) \right) \iff \left(\forall \alpha \in A \ P(\alpha) \right) \vee \left(\forall \alpha \in A \ Q(\alpha) \right).$$

Interacción de \exists con \wedge , interacción de \exists con \vee

Sean $P, Q: A \rightarrow \{0, 1\}$ dos predicados.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\exists \alpha \in A \left(P(\alpha) \wedge Q(\alpha) \right) \qquad \left(\exists \alpha \in A \ P(\alpha) \right) \wedge \left(\exists \alpha \in A \ Q(\alpha) \right).$$

Interacción de \exists con \wedge , interacción de \exists con \vee

Sean $P, Q: A \rightarrow \{0, 1\}$ dos predicados.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\exists \alpha \in A \left(P(\alpha) \wedge Q(\alpha) \right) \quad \Longrightarrow \quad \left(\exists \alpha \in A \ P(\alpha) \right) \wedge \left(\exists \alpha \in A \ Q(\alpha) \right).$$

Interacción de \exists con \wedge , interacción de \exists con \vee

Sean $P, Q: A \rightarrow \{0, 1\}$ dos predicados.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\exists \alpha \in A \left(P(\alpha) \wedge Q(\alpha) \right) \quad \Longrightarrow \quad \left(\exists \alpha \in A \ P(\alpha) \right) \wedge \left(\exists \alpha \in A \ Q(\alpha) \right).$$

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\exists \alpha \in A \left(P(\alpha) \vee Q(\alpha) \right) \quad \left(\exists \alpha \in A \ P(\alpha) \right) \vee \left(\exists \alpha \in A \ Q(\alpha) \right).$$

Interacción de \exists con \wedge , interacción de \exists con \vee

Sean $P, Q: A \rightarrow \{0, 1\}$ dos predicados.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\exists \alpha \in A \left(P(\alpha) \wedge Q(\alpha) \right) \implies \left(\exists \alpha \in A \ P(\alpha) \right) \wedge \left(\exists \alpha \in A \ Q(\alpha) \right).$$

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\exists \alpha \in A \left(P(\alpha) \vee Q(\alpha) \right) \iff \left(\exists \alpha \in A \ P(\alpha) \right) \vee \left(\exists \alpha \in A \ Q(\alpha) \right).$$

Las leyes distributivas para los cuantificadores

Sea $P: A \rightarrow \{0, 1\}$ un predicado y sea q una afirmación.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \quad (P(\alpha) \vee q) \qquad \left(\forall \alpha \in A \quad P(\alpha) \right) \vee q.$$

Las leyes distributivas para los cuantificadores

Sea $P: A \rightarrow \{0, 1\}$ un predicado y sea q una afirmación.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \quad (P(\alpha) \vee q) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\forall \alpha \in A \quad P(\alpha) \right) \vee q.$$

Las leyes distributivas para los cuantificadores

Sea $P: A \rightarrow \{0, 1\}$ un predicado y sea q una afirmación.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \quad (P(\alpha) \vee q) \quad \iff \quad (\forall \alpha \in A \quad P(\alpha)) \vee q.$$

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\exists \alpha \in A \quad (P(\alpha) \wedge q) \quad \iff \quad (\exists \alpha \in A \quad P(\alpha)) \wedge q.$$

Las leyes distributivas para los cuantificadores

Sea $P: A \rightarrow \{0, 1\}$ un predicado y sea q una afirmación.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \quad (P(\alpha) \vee q) \quad \iff \quad (\forall \alpha \in A \quad P(\alpha)) \vee q.$$

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\exists \alpha \in A \quad (P(\alpha) \wedge q) \quad \iff \quad (\exists \alpha \in A \quad P(\alpha)) \wedge q.$$

Interacción entre \forall y \forall , interacción entre \exists y \exists

Sea $P: A \times B \rightarrow \{0, 1\}$ un predicado.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \quad \forall \beta \in B \quad P(\alpha, \beta) \qquad \forall \beta \in B \quad \forall \alpha \in A \quad P(\alpha, \beta).$$

Interacción entre \forall y \forall , interacción entre \exists y \exists

Sea $P: A \times B \rightarrow \{0, 1\}$ un predicado.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \quad \forall \beta \in B \quad P(\alpha, \beta) \quad \iff \quad \forall \beta \in B \quad \forall \alpha \in A \quad P(\alpha, \beta).$$

Interacción entre \forall y \forall , interacción entre \exists y \exists

Sea $P: A \times B \rightarrow \{0, 1\}$ un predicado.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \quad \forall \beta \in B \quad P(\alpha, \beta) \quad \iff \quad \forall \beta \in B \quad \forall \alpha \in A \quad P(\alpha, \beta).$$

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\exists \alpha \in A \quad \exists \beta \in B \quad P(\alpha, \beta) \quad \iff \quad \exists \beta \in B \quad \exists \alpha \in A \quad P(\alpha, \beta).$$

Interacción entre \forall y \forall , interacción entre \exists y \exists

Sea $P: A \times B \rightarrow \{0, 1\}$ un predicado.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \quad \forall \beta \in B \quad P(\alpha, \beta) \quad \iff \quad \forall \beta \in B \quad \forall \alpha \in A \quad P(\alpha, \beta).$$

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\exists \alpha \in A \quad \exists \beta \in B \quad P(\alpha, \beta) \quad \iff \quad \exists \beta \in B \quad \exists \alpha \in A \quad P(\alpha, \beta).$$

Interacción entre \forall y \exists

Sea $P: A \times B \rightarrow \{0, 1\}$ un predicado.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \quad \exists \beta \in B \quad P(\alpha, \beta) \qquad \exists \beta \in B \quad \forall \alpha \in A \quad P(\alpha, \beta).$$

Interacción entre \forall y \exists

Sea $P: A \times B \rightarrow \{0, 1\}$ un predicado.

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\forall \alpha \in A \quad \exists \beta \in B \quad P(\alpha, \beta) \quad \iff \quad \exists \beta \in B \quad \forall \alpha \in A \quad P(\alpha, \beta).$$