Algunos elementos de lógica con cuantificadores

Objetivos. Repasar algunas propiedades de los cuantificadores $\forall$ y $\exists$.

Requisitos. Operaciones lógicas, predicados, cuantificadores.

1 Proposición (las leyes de De Morgan). *Sea $P\colon A \to \{0,1\}$ un predicado.*

$$\overline{\forall \alpha \in A \qquad P(\alpha)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \alpha \in A \quad \overline{P(\alpha)}.$$

$$\overline{\exists \alpha \in A \qquad P(\alpha)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \alpha \in A \quad \overline{P(\alpha)}.$$

2 Proposición (interacción de $\forall$ con $\wedge$, interacción de $\forall$ con $\vee$). *Sean $P, Q\colon A \to \{0,1\}$ dos predicados. Entonces,*

$$\forall \alpha \in A \quad \Big(P(\alpha) \wedge Q(\alpha)\Big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(\forall \alpha \in A \quad P(\alpha)\Big) \ \wedge \ \Big(\forall \alpha \in A \quad Q(\alpha)\Big),$$

$$\forall \alpha \in A \quad \Big(P(\alpha) \vee Q(\alpha)\Big) \qquad \Longleftarrow \qquad \Big(\forall \alpha \in A \quad P(\alpha)\Big) \ \vee \ \Big(\forall \alpha \in A \quad Q(\alpha)\Big).$$

3 Proposición (interacción de $\exists$ con $\wedge$, interacción de $\exists$ con $\vee$). *Sean $P, Q\colon A \to \{0,1\}$ dos predicados. Entonces,*

$$\exists \alpha \in A \quad \Big(P(\alpha) \wedge Q(\alpha)\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad \Big(\exists \alpha \in A \quad P(\alpha)\Big) \ \wedge \ \Big(\exists \alpha \in A \quad Q(\alpha)\Big),$$

$$\exists \alpha \in A \quad \Big(P(\alpha) \vee Q(\alpha)\Big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(\exists \alpha \in A \quad P(\alpha)\Big) \ \vee \ \Big(\exists \alpha \in A \quad Q(\alpha)\Big).$$

4 Proposición (las leyes distributivas para los cuantificadores). *Sea $P\colon A \to \{0,1\}$ un predicado y sea q una afirmación.*

$$\forall \alpha \in A \qquad \Big(P(\alpha) \ \vee \ q\Big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(\forall \alpha \in A \quad P(\alpha)\Big) \ \vee \ q.$$

Determinar, si las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

$$\exists \alpha \in A \qquad \Big(P(\alpha) \ \wedge \ q\Big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(\exists \alpha \in A \quad P(\alpha)\Big) \ \wedge \ q.$$

5 Proposición (interacción entre $\forall$ y $\forall$, interacción entre $\exists$ y $\exists$). *Sea $P\colon A \times B \to \{0,1\}$ un predicado. Entonces,*

$$\forall \alpha \in A \qquad \forall \beta \in B \qquad P(\alpha, \beta) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \beta \in B \qquad \forall \alpha \in A \qquad P(\alpha, \beta),$$

$$\exists \alpha \in A \qquad \exists \beta \in B \qquad P(\alpha, \beta) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists \beta \in B \qquad \exists \alpha \in A \qquad P(\alpha, \beta).$$

6 Proposición (interacción entre $\forall$ y $\exists$). *Sea $P\colon A \times B \to \{0,1\}$ un predicado. Entonces,*

$$\forall \alpha \in A \qquad \exists \beta \in B \qquad P(\alpha, \beta) \qquad \Longleftarrow \qquad \exists \beta \in B \qquad \forall \alpha \in A \qquad P(\alpha, \beta).$$