

Algunos ejercicios de cursos propedéuticos para entrar a escuelas superiores de matemáticas de universidades en Rusia

(Egor Maximenko)

En los años 2003–2008 trabajé en la Universidad Estatal de Rostov del Don (es una ciudad en Rusia), en la Facultad de Mecánica, Matemáticas y Ciencias de Computación. El temario total y el nivel de los cursos Álgebra I, II, III en la Licenciatura en Matemáticas en Rostov eran comparables con el temario total y el nivel de estos cursos en la ESFM del IPN.

Para ingresar a la Licenciatura en Matemáticas en Rostov del Don, los estudiantes tenían que presentar un examen de matemáticas y un examen de física. El examen de matemáticas constaba de 5 problemas. Por supuesto, resolver bien un problema significaba no solamente llegar a la respuesta correcta, sino escribir todos los razonamientos. Debo confesar que aún ahora, después de muchos años de enseñanza, yo necesitaría más de 30 minutos para escribir bien las soluciones de estos 5 problemas.

Muchos jóvenes, para prepararse a los estudios en Licenciatura y al examen de ingreso, tomaban cursos propedéuticos sabatinos durante su último año de preparatoria. Los grupos eran de 15 o 20 alumnos, y los precios de los cursos eran accesibles. Cada sábado o domingo los alumnos asistían tres horas de clases propedéuticos de matemáticas y luego resolvían tareas en casa. Impartí estos cursos tres veces, esto es, tres años. También se impartían cursos propedéuticos de física y de programación. Se suponía que antes de entrar a la carrera de matemáticas aplicadas, hay que tener cierta experiencia de programación.

A continuación están escritos algunos ejercicios y problemas que resolvíamos en los cursos propedéuticos. Empezábamos el repaso con *ejercicios* simples. Los *problemas* son más difíciles y corresponden al nivel del examen de admisión. En este texto nuestro varios temas típicos de álgebra, sin tocar la geometría ni el cálculo.

Creo que los exámenes de admisión y los cursos propedéuticos hacían papeles importantes y positivos. Los futuros alumnos sabían qué nivel se requiere para estudiar en Licenciatura, podían estimar de manera adecuada su nivel y prepararse (con cursos propedéuticos o de manera independiente) para alcanzar el nivel requerido. Los alumnos que estudiaban bien en cursos propedéuticos y decidían entrar a la Licenciatura, por lo común, estaban bien preparados para los primeros semestres.

Actualmente este sistema está destruido. En vez de presentar exámenes de ingreso en la universidad, los egresados de preparatorias presentan exámenes unificados, los cuales se componen por una institución a nivel federal. Se supone que el sistema nuevo es más resistente a la corrupción y es más cómoda para aquellos alumnos que envían sus solicitudes a varias universidades. Sin embargo, en realidad el nivel de los estudiantes de licenciatura se bajó mucho, y los índices de reprobación en los primeros semestres ahora son más altos que antes.

Trinomio cuadrático y sus raíces

Ejercicio 1. Dibujar la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Ejercicio 2. Resolver la ecuación $(2x^2 - 5)^2 = (x^2 - 4)^2$.

Ejercicio 3. Resolver la ecuación $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$.

Problema 4. Determinar para cuáles valores del parámetro a el polinomio

$$x^2 + (2a + 4)x + a^2 - 9$$

tiene dos raíces reales diferentes entre si.

Problema 5. Encontrar todos los valores del parámetro a para los cuales la ecuación $x^2 - 4x = a$ tiene por lo menos una raíz en el intervalo $[1, 4]$.

Problema 6. Encontrar todos los valores del parámetro a para los cuales las raíces de la siguiente ecuación están por ambos lados del número 1:

$$x^2 - ax + (a^2 - a - 4) = 0.$$

Solución de ecuaciones con raíces y valores absolutos

Ejercicio 7. Resolver la ecuación

$$\sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x - 2}} - \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x - 2}} = 1.$$

Ejercicio 8. Resolver la ecuación $\sqrt{2x^2 - 7} = x + 1$.

Problema 9. Resolver la ecuación $|x + 1| + |x - 2| = a$, donde a es un parámetro.

Progresión aritmética y progresión geométrica

Ejercicio 10. Se considera una progresión aritmética a_1, a_2, a_3, \dots y se denota por S_n la suma de sus primeros n elementos. Se sabe que $S_4 = 34$ y $S_6 = 69$. Calcular a_1 y a_2 .

Ejercicio 11. Encontrar tres números enteros a_1, a_2, a_3 , si se sabe que estos tres números forman una progresión geométrica, mientras que $a_1, a_2 + 8, a_3$ forman una progresión aritmética y $a_1, a_2 + 8, a_3 + 64$ forman una progresión geométrica.

Problema 12. Hallar tres números positivos a_1, a_2, a_3 que forman una progresión aritmética con suma 15, mientras que $a_1 + 1, a_2 + 4$ y $a_3 + 19$ forman una progresión geométrica.

Problema 13. Tres números b_1, b_2, b_3 forman una progresión geométrica, $b_1 \neq 0, \frac{b_2}{b_1} \neq 1$, y los productos b_1b_2, b_2b_3, b_3b_1 forman una progresión aritmética. Calcular $\frac{b_2}{b_1}$.

Trigonometría

Ejercicio 14. Calcular $\cos(\alpha)$ y $\sin(\alpha)$, si α es un ángulo obtuso y $\operatorname{tg}(\alpha) = -\frac{12}{5}$.

Ejercicio 15. Expresar $\cos^6 x + \sin^6 x$ a través de $\cos 2x$.

Ejercicio 16. Resolver la ecuación

$$\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{7}{2} \cos x \sin x.$$

Ejercicio 17. Resolver la desigualdad

$$\sin^2 x + \frac{3}{2} \cos x > 0.$$

Ejercicio 18. Calcular $\cos \frac{\pi}{12}$ y $\sin \frac{\pi}{12}$ (expresar a través de radicales).

Problema 19. Calcular el conjunto de valores (el rango) de la función

$$f(x) = \log_{1/3} \frac{12 \cos x - 5 \sin x + 16}{9}.$$

Problema 20. Encontrar todos los valores del parámetro b para los cuales la siguiente ecuación tiene al menos una solución:

$$\cos^2 x - 4 \cos x = b.$$