


Multiplicación de los polinomios

Ejemplo. Calcular el coeficiente de x^4 en el siguiente producto de polinomios:

$$(x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 7x - 2)(3x^3 - 9x^2 - 4x + 4).$$

Solución. La potencia x^4 se obtiene al multiplicar los siguientes términos:

$$(x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 7x - 2)(3x^3 - 9x^2 - 4x + 4)$$


Así que el coeficiente de x^4 es

$$1 \cdot 4 + (-8) \cdot (-4) + 5 \cdot (-9) + 7 \cdot 3 = 4 + 32 - 45 + 21 = 12. \quad \square$$

1. Calcule el coeficiente de x^3 en el siguiente producto de polinomios:

$$(2x^3 - 4x^2 + x - 5)(x^2 + 7x - 3).$$

2. Fórmulas para los coeficientes del producto de los polinomios, un ejemplo. Sean

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \quad g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2.$$

Denotemos por c_k los coeficientes del producto $h(x) = f(x)g(x)$:

$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5.$$

Calcule:

$$c_0 =$$

$$c_1 =$$

$$c_2 =$$

$$c_3 =$$

$$c_4 =$$

$$c_5 =$$

3. En los sumandos $a_i b_j$ que forman c_3 en el ejercicio anterior, ¿cuál es la relación entre i y j ?

$$i + j =$$

En general, ¿cuál es la relación entre i y j en los sumandos $a_i b_j$ que forman c_k ?

$$i + j =$$

Fórmula general escrita con una suma sobre dos variables i y j . Sean $f(x)$ y $g(x)$ polinomios de grados m y n respectivamente:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m, \\ g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n. \end{aligned}$$

Denotemos por c_k los coeficientes del producto $h(x) = f(x)g(x)$:

$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{m+n}x^{m+n}.$$

Entonces

$$c_k = \sum_{\substack{i,j: \\ i+j=k \\ 0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} a_i b_j.$$

Objetivo: escribir la suma con una variable i y los límites de su variación. Sustituyendo j por $k - i$ uno puede escribir la suma con una variable i :

$$c_k = \sum_{i=?}^? a_i b_{k-i}.$$

Vamos a determinar los límites de la variación de i .

4. Si $j = k - i$, ¿cómo se escriben las desigualdades $j \geq 0$ y $j \leq n$ en términos de la variable i ?

$$\begin{aligned} j \geq 0 & \iff k - i \geq 0 & \iff i \leq k \\ j \leq n & \iff k - i \leq n & \iff i \geq k - n \end{aligned}$$

5. Simplifique los siguientes sistemas de desigualdades:

$$\begin{cases} i \geq 2; \\ i \geq 5 \end{cases} \iff i \geq \underbrace{\quad}_?$$

$$\begin{cases} i \leq 8; \\ i \leq 4 \end{cases} \iff i \leq \underbrace{\quad}_?$$

$$\begin{cases} i \geq a; \\ i \geq b \end{cases} \iff i \geq \underbrace{\quad}_?$$

$$\begin{cases} i \leq a; \\ i \leq b \end{cases} \iff i \leq \underbrace{\quad}_?$$

6. Simplifique los siguientes sistemas de desigualdades:

$$\begin{cases} i \geq 3; \\ i \leq 15; \\ i \geq 1; \\ i \leq 8 \end{cases} \iff \underbrace{\quad}_? \leq i \leq \underbrace{\quad}_?$$

$$\begin{cases} i \leq a; \\ i \geq b; \\ i \leq c; \\ i \geq d \end{cases} \iff \underbrace{\quad}_? \leq i \leq \underbrace{\quad}_?$$

7. **Límites de la variación de i .** Tomando en cuenta que $j = k - i$ escriba todas las desigualdades en términos de la variable i y simplifique el sistema obtenido:

$$\begin{cases} i \geq 0 \\ i \leq m \\ j \geq 0 \\ j \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} i \geq 0 \\ i \leq m \\ i \leq \quad \\ i \geq \quad \end{cases} \iff \underbrace{\quad}_? \leq i \leq \underbrace{\quad}_?.$$

8. Escriba los límites de la variación de i en la fórmula general para los coeficientes del producto de dos polinomios:

$$c_k = \sum_{i=\underbrace{\quad}_?}^{\underbrace{\quad}_?} a_i b_{k-i}.$$