Las operaciones lógicas conjunción y disyunción (repaso breve)

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

23 de febrero de 2021

Objetivo:

- repasar la definición de las operaciones lógicas $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\oplus$,
- demostrar algunas de sus propiedades.

Prerrequisitos:

- experiencia de hacer razonamientos matemáticos.

Aplicaciones:

- operaciones lógicas $\to$ y $\leftrightarrow$ (implicación y equivalencia) y sus propiedades,
- operaciones con conjuntos $\cup$, $\cap$, $\setminus$ y $\triangle$, y sus propiedades.

Valores lógicos

Por brevedad, denotamos el verdadero por 1 y el falso por 0.

En inglés y en varios lenguajes de programación, se escribe

$$\text{True}, \quad \text{true}, \quad \text{T},$$

$$\text{False}, \quad \text{false}, \quad \text{F}.$$

La operación binaria $\wedge$ (conjunción)

La función $\wedge\colon \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ se define mediante las siguientes reglas:

$$0 \wedge 0 := 0,$$

$$0 \wedge 1 := 0,$$

$$1 \wedge 0 := 0,$$

$$1 \wedge 1 := 1.$$

Escribimos lo mismo de manera breve, en una tabla de verdad.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La propiedad conmutativa de la conjunción

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Proposición

Para cualesquiera p y q en $\{0,1\}$,

$$p \wedge q = q \wedge p.$$

Demostración: se ve de la tabla.

Los valores 0 y 1 son idempotentes bajo la conjunción

Proposición

Para cada p en $\{0, 1\}$,

$$p \wedge p = p.$$

Demostración.

p	$p \wedge p$
0	0
1	1

La conjunción y las constantes 0 y 1

Proposición

Para cualquier valor lógico p,

$$p \wedge 1 = p, \qquad p \wedge 0 = 0.$$

Demostración.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Proposición (la propiedad asociativa de la conjunción)

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r).$$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

El conjunto $\{0, 1\}$ con la operación $\wedge$, como una estructura algebraica

Consideramos el conjunto $\{0, 1\}$ con la operación binaria $\wedge$.

- ¿Es un semigrupo?
- ¿Es un monoide?
- ¿Es un grupo?

La operación binaria $\vee$ (disyunción)

La función $\vee \colon \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ se define mediante las siguientes reglas:

$$
\begin{aligned}
0 \vee 0 &:= 0,\\
0 \vee 1 &:= 1,\\
1 \vee 0 &:= 1,\\
1 \vee 1 &:= 1.
\end{aligned}
$$

Escribimos lo mismo de manera breve, en una tabla de verdad.

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Algunas propiedades de $\vee$

$$p \vee p = p$$

$$p \vee 0 = p$$

$$p \vee 1 = 1$$

$$p \vee q = q \vee p$$

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r).$$

El conjunto $\{0, 1\}$ con la operación $\vee$, como una estructura algebraica

Consideramos el conjunto $\{0, 1\}$ con la operación binaria $\vee$.

- ¿Es un semigrupo?
- ¿Es un monoide?
- ¿Es un grupo?

Propiedades distributivas

Proposición

$$(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r).$$

Proposición

$$(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r).$$

Ejercicio. Demostrar estas propiedades, usando tablas de verdad (con 8 renglones).

Las operaciones binarias $\wedge$ y $\vee$ como el máximo y el mínimo

Consideramos $\{0, 1\}$ con el orden natural: $0 < 1$.

Proposición

Para cualesquiera p, q en $\{0, 1\}$,

$$p \wedge q = \max\{p, q\}, \qquad p \vee q = \min\{p, q\},$$

Las propiedades asociativas se pueden interpretar de la siguiente manera:

$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r) = \max\{p, q, r\},$$

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r) = \min\{p, q, r\}.$$

Las operaciones $\wedge$, $\vee$ y la comparación

Proposición

Para cualesquiera p, q en $\{0, 1\}$,

$$p \wedge q \leq p, \qquad p \wedge q \leq q.$$

Escribir propiedades similares para $\vee$.

La operación unaria $\neg$ (negación)

La función $\neg\colon \{0,1\} \to \{0,1\}$
se define mediante las siguientes reglas:

$$\neg 0 := 1,$$

$$\neg 1 := 0.$$

Escribimos lo mismo de manera breve,
en una tabla de verdad.

p	$\neg p$
0	1
1	0

La propiedad idempotente de la negación

Proposición

Para cualquier p en $\{0, 1\}$,

$$\neg(\neg p) = p.$$

Demostración.

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
0	1	0
1	0	1

Las leyes de De Morgan

Proposición

Para cualquiera p, q en $\{0, 1\}$,

$$\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q), \qquad \neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q).$$

Demostración: ejercicio.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	?	?	?	?	?
1	0	?	?	?	?	?
1	1	?	?	?	?	?

Dualidad entre $\wedge$ y $\vee$

Ejercicio. Demostrar la propiedad asociativa de $\vee$,
usando la propiedad asociativa de $\wedge$ y una ley de De Morgan.

La operación binaria $\oplus$ (disyunción exclusiva)

La función $\oplus\colon \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ se define mediante las siguientes reglas:

$$0 \oplus 0 := 0,$$

$$0 \oplus 1 := 1,$$

$$1 \oplus 0 := 1,$$

$$1 \oplus 1 := 0.$$

Escribimos lo mismo de manera breve, en una tabla de verdad.

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Expresión de $\oplus$ en términos de $\land, \lor, \neg$

Proposición

Para cualesquiera p, q en $\{0, 1\}$,

$$p \oplus q = (p \land (\neg q)) \lor (q \land (\neg p)),$$

$$p \oplus q = (p \lor q) \land (\neg (p \land q)).$$

Ejercicio: demostrar estas fórmulas con tablas de verdad.

Otras conexiones entre $\vee$, $\wedge$, $\neg$ y $\oplus$

$$\neg p = p \oplus 1,$$

$$p \vee q = (p \oplus q) \oplus (p \wedge q).$$

Algunas propiedades de $\oplus$

Proposición

Para cualesquiera p, q, r en $\{0,1\}$,

$$(p \oplus q) \oplus r = p \oplus (q \oplus r).$$

Ejercicio: demostrar esta propiedad con una tabla de verdad.

Ejercicio. Determinar si $\{0,1\}$ con la operación $\oplus$ es un grupo.

¿Cuál es el elemento neutro?

Dado p en $\{0,1\}$, ¿cuál es el inverso de p?

La operación $\oplus$ como la adición módulo 2

Recordamos que $\mathbb{Z}_2$ se define como el grupo cociente $\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$.

Definimos $f\colon \{0,1\} \to \mathbb{Z}_2$,

$$f(x) := x + 2\mathbb{Z}.$$

Mostrar que para cualesquiera p, q en $\{0,1\}$,

$$f(p \oplus q) = f(p) + f(q).$$

Como el grupo cociente $\mathbb{Z}_2$ es asociativo, tenemos otro camino para demostrar que la operación $\oplus$ es asociativa.

El conjunto $\{0,1\}$ con las operaciones $\oplus$ y $\wedge$

Mostrar que $\{0,1\}$ con las operaciones $\oplus$ y $\wedge$ es un anillo asociativo conmutativo con un elemento neutro bajo $\wedge$.

Recordemos que $2\mathbb{Z}$ es un ideal del anillo $\mathbb{Z}$.

Mostrar que $\{0,1\}$ con las operaciones $\oplus$ y $\wedge$ es isomorfo al anillo cociente $\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$.